Analysis II
Wintersemester 2021/2022

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 5

Ausgabe:	Di., 16.11.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 23.11.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 24.11.2021 bzw. Do., 25.11.2021

Ⓑ **Aufgabe 5.1:** (Stetigkeit, $3 + 3 + 3$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit, Abgeschlossenheit, Beschränktheit und Kompaktheit:

(a) $\{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y < 1 + \sqrt{|x|} \,\}$

(b) $\{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1,\ y = x^2 + 1 \,\}$

(c) $\{\, (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x > y > z > 0 \,\}$

Ⓑ **Aufgabe 5.2:** (Stetigkeit, $3 + 3$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f,\, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x,\, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,\, y) \neq (0,\, 0), \\ 0, & (x,\, y) = (0,\, 0), \end{cases} \qquad g(x,\, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,\, y) \neq (0,\, 0), \\ 0, & (x,\, y) = (0,\, 0), \end{cases} \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ⓑ **Aufgabe 5.3:** (Normen und Konvergenz in $C([0,\, 1])$, $2 + 2 + 2$ Punkte)
Seien $\| \cdot \|_1,\ \| \cdot \|_\infty : C([0,\, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert wie in Aufgabe 3.1.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $\|f\|_1 \leq C \|f\|_\infty$ für alle $f \in C([0,\, 1])$.

(b) Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,\, 1])$, die gegeben ist als

$$f_k(x) := x^k, \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad\qquad k \in \mathbb{N},$$

und zeigen Sie, dass $\|f_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$.

(c) Zeigen Sie, dass es *keine* Konstante $C' > 0$ gibt, so dass $\|f\|_\infty \leq C' \|f\|_1$ für alle $f \in C([0,\, 1])$.

Aufgabe 5.4: (Stetigkeit der Norm)
Seien $\mathbb{F} \in \{\, \mathbb{R},\, \mathbb{C} \,\}$ und $(X,\, \| \cdot \|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{F}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|, \qquad\qquad x,\, y \in X.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\| \cdot \| : X \longrightarrow [0,\, \infty)$ stetig ist bzgl. $\| \cdot \|$ und $| \cdot |$.

(c) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $S^{n-1} := \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| = 1 \,\}$ kompakt ist in $(\mathbb{R}^n,\, | \cdot |)$.