Analysis II
Wintersemester 2021/2022
Übungsblatt 4

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 09.11.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 16.11.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 17.11.2021 bzw. Do., 18.11.2021

Ⓑ **Aufgabe 4.1:** (Inneres, Abschluss und Rand, $2+2+2$ Punkte)
Seien $(X,\, \mu)$ ein metrischer Raum und $A,\, B \subseteq X$ mit $A \subseteq B$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

(c) Geben Sie ein Beispiel an (für $(X,\, \mu)$ und $A,\, B \subseteq X$ mit $A \subseteq B$), so dass $\partial A \not\subseteq \partial B$.

Ⓑ **Aufgabe 4.2:** (Inneres, Abschluss und Rand, 6 Punkte)
Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f,\, g : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [a,\, b]$. Bestimmen Sie für

$$A := \Big\{\, (x,\, y) \in [a,\, b] \times \mathbb{R} \,:\, f(x) < y < g(x) \,\Big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

das Innere A°, den Abschluss $\bar{A}$ und den Rand ∂A.

Bemerkung: Wie üblich soll $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik ausgestattet sein.

Hinweis: Es ist hilfreich, zunächst zu zeigen, dass die Menge $\{\, (x,\, y) \in (a,\, b) \times \mathbb{R} \,:\, f(x) < y < g(x) \,\}$ offen ist und die Menge $\{\, (x,\, y) \in [a,\, b] \times \mathbb{R} \,:\, f(x) \leq y \leq g(x) \,\}$ abgeschlossen.

Ⓑ **Aufgabe 4.3:** (Häufungspunkte, 4 Punkte)
Seien $(X,\, \mu)$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie: Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von A, wenn eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{\, x \,\}$ existiert mit $x_k \to x$ für $k \to \infty$.

Ⓑ **Aufgabe 4.4:** (Kompaktheit endlicher Mengen, 4 Punkte)
Seien $(X,\, \mu)$ ein metrischer Raum, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \in X$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \,\}$ kompakt ist.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst Mengen der Form $\{\, x \,\}$ mit $x \in X$. Proposition 1.4.3 (g) soll hier nicht verwendet werden. Proposition 1.4.3 (i) kann verwendet werden.