Analysis II
Wintersemester 2021/2022

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 3

Ausgabe:	Di., 02.11.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 09.11.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 10.11.2021 bzw. Do., 11.11.2021

Ⓑ **Aufgabe 3.1:** (Innenprodukte und Normen, $2+3+3$ Punkte)
Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $J := [a,\, b] \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $C(J) = BC(J)$.

(b) Zeigen Sie, dass durch $\|\cdot\|_1 : C(J) \longrightarrow [0,\, \infty)$ mit

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x, \qquad f \in C(J),$$

eine Norm auf $C(J)$ gegeben ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : C(J) \times C(J) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\langle f,\, g\rangle_2 := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x, \qquad f,\, g \in C(J),$$

ein Innenprodukt auf $C(J)$ gegeben ist. Bestimmen Sie die von $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ induzierte Norm $\|\cdot\|_2$ auf $C(J)$.

Bemerkung: Nach Teil (a) ist durch $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{BC(J)}$ eine Norm auf $C(J)$ gegeben, die sog. Maximumnorm *auf $C(J)$. Wir verwenden hier die Symbole $\|\cdot\|_p$ mit $p \in \{\, 1,\, 2,\, \infty \,\}$ für Normen auf $C(J)$, die natürlich nicht übereinstimmen mit den Normen auf $\mathbb{R}^n$, die in Beispiel 1.2.2 betrachtet wurden und für die die gleichen Symbole verwendet werden.*

Ⓑ **Aufgabe 3.2:** (Durchschnitte von offenen Mengen, 4 Punkte)
Bestimmen Sie die Menge $A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{k},\, \frac{1}{k})$ und zeigen Sie, dass A nicht offen ist (im metrischen Raum $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der euklidischen Metrik).

Ⓑ **Aufgabe 3.3:** (Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen, 4 Punkte)
Bestimmen Sie die Menge $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[0,\, 1-2^{-k}]$ und zeigen Sie, dass U nicht abgeschlossen ist (im metrischen Raum $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der euklidischen Metrik).

Aufgabe 3.4: (Kugeln in normierten Räumen)
Sei $(X,\, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, sei $x \in X$ und sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{B_\varepsilon(x)} = \bar{B}_\varepsilon(x)$ sowie $\partial B_\varepsilon(x) = \{\, y \in X \,:\, \|x - y\| = \varepsilon \,\}$ gelten.