Analysis II
Wintersemester 2021/2022
Übungsblatt 2

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 26.10.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 02.11.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 03.11.2021 bzw. Do., 04.11.2021

Aufgabe 2.1: (Hölder'sche Ungleichung)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p,\, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie die *Hölder'sche Ungleichung:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q, \qquad x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: In der Bedingung $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *ist „* $\frac{1}{\infty} = 0$ *" zu setzen. Für* $(p,\, q) \in \{\,(1,\, \infty),\; (\infty,\, 1)\,\}$ *kann die Hölder'sche Ungleichung direkt verifiziert werden. Für* $1 < p,\, q < \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *ist die Young'sche Ungleichung hilfreich, die Sie ohne Beweis verwenden können: Für alle* $a,\, b \geq 0$ *gilt* $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

Ⓑ **Aufgabe 2.2:** (Normen auf $\mathbb{R}^n$, $2+2+4$ Punkte)
Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\, \infty)$ gegeben als

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty, \qquad \|x\|_\infty := \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass so für jedes $1 \leq p \leq \infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist, d. h. dass gilt

(i) Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\|_p = 0$ genau für $x = 0$.

(ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|\alpha x\|_p = |\alpha|\, \|x\|_p$.

(iii) Für alle $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Hinweis: Bei (iii) sollten zunächst die Fälle $p \in \{\,1,\, \infty\,\}$ *betrachtet werden. Für die übrigen Fälle ist die Hölder'sche Ungleichung nützlich.*

Aufgabe 2.3: (Einheitskugeln)
Skizzieren Sie die Einheitskugeln $\|\cdot\|_p$–$B_1(0)$ in $\mathbb{R}^2$ für $p \in \{\,1,\, 2,\, \infty\,\}$.

Ⓑ **Aufgabe 2.4:** (Konvergenz in $\mathbb{R}^n$, 6 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass genau dann $x_k \to x$ bzgl. der euklidischen Norm $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ für $k \to \infty$ gilt, wenn $x_k^{(\ell)} \to x^{(\ell)}$ in $\mathbb{R}$ für $k \to \infty$ für $\ell = 1,\, \ldots,\, n$. Hier schreiben wir $x_k = (x_k^{(1)},\, x_k^{(2)},\, \ldots,\, x_k^{(n)})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie $x = (x^{(1)},\, x^{(2)},\, \ldots,\, x^{(n)})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2.5: (Metriken auf $\mathbb{R}$)
Zeigen Sie, dass durch $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,\, \infty)$ mit

$$\mu(x,\, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|, \qquad x,\, y \in \mathbb{R},$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.