Analysis II
Wintersemester 2021/2022

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 1

Ausgabe:	Di., 19.10.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 26.10.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 27.10.2021 bzw. Do., 28.10.2021

Aufgabe 1.1: (Uneigentliche Riemann-Integrale)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn $\alpha > 1$, und in diesem Fall ist $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = (\alpha - 1)^{-1}$.

(b) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn $\alpha < 1$, und in diesem Fall ist $\int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = (1 - \alpha)^{-1}$.

(c) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar.

Ⓑ **Aufgabe 1.2:** (Uneigentliche Riemann-Integrale, $4 + 4$ Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 1.3: (Konvergenz von Riemann-Integralen)
Sei $f_n : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}\sin(nx), & \text{falls } 0 \le x \le \frac{\pi}{n}, \\ 0, & \text{falls } \frac{\pi}{n} < x \le \pi, \end{cases} \qquad x \in [0, \pi],$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise in $[0, \pi]$ gegen eine Funktion $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass f_n Riemann-integrierbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$, und, dass f is Riemann-integrierbar ist, wobei $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f?

Ⓑ **Aufgabe 1.4:** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 6 Punkte)
Entscheiden Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x x \exp(y^2 - x^2)\,\mathrm{d}y$$

existiert und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

Hinweis: Verwenden Sie die Regel von de l'Hospital; denken Sie dabei an den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.