Analysis II
Wintersemester 2021/2022

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ergänzende Übungen

Besprechung: Mi., 20.10.2021 bzw. Do., 21.10.2021

Aufgabe E.1: (Stammfunktionen)
Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

(a) $v : (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $v(x) := \frac{2x}{\tan(x^2)}$ für $0 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(b) $w : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $w(x) := \sqrt{2x + 3}$ für $x > 0$.

Aufgabe E.2: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^x \left(\int_0^y f(z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y = \int_0^x (x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \geq 0.$$

Hinweis: Denken Sie an den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Aufgabe E.3: (Konvergenz von Riemann-Integralen)
Sei $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f_n(x) := \begin{cases} n, & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{falls } \frac{1}{n} < x \leq 1 \text{ oder } x = 0, \end{cases} \qquad x \in [0, 1],$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise in $[0, 1]$ gegen eine Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass f_n Riemann-integrierbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$, und, dass f is Riemann-integrierbar ist, wobei $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f?

Aufgabe E.4: (Uneigentliche Riemann-Integrale)
Sei $f : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ monoton fallend. Zeigen Sie, dass f genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar ist, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_k ke^{-k^2}$ absolut konvergiert.

Aufgabe E.5: (Uneigentliche Riemann-Integrale)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: *Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

dann ist f uneigentlich Riemann-integrierbar über $\mathbb{R}$.