Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 12

Abgabe der Lösungen: 2. 2. 2016

Aufgabe 48. (10 Punkte)

Beweisen Sie folgende Behauptung aus der Vorlesung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbf{S}^n$ gilt $T_x \mathbf{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v\rangle = 0\}$.

Geben Sie für $z := \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) \in \mathbf{S}^2$ eine Basis von $\mathrm{T}_z \mathbf{S}^2$ an.

Aufgabe 49. (10 Punkte)

Für $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $R > r$ betrachten wir die Hyperfläche $T_{R,r}$ aus Aufgabe 46. Geben Sie stetige Abbildungen $X, Y\colon T_{R,r} \to \mathbb{R}^3$ an, sodass für jeden Punkt $p \in T_{R,r}$ gilt: $(X(p), Y(p))$ ist eine Basis des Tangentialraums $\mathrm{T}_p T_{R,r}$.

Aufgabe 50. (10 Punkte)

Auf $U := \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^9 \subseteq \mathbb{R}^{10}$ betrachten wir

$$\alpha := \ln(x_1)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_7 + \sin(x_9)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 \wedge \mathrm{d}x_{10} + \cos(x_4)\,\mathrm{d}x_5 \wedge \mathrm{d}x_6 \wedge \mathrm{d}x_8 \in \Omega^3(U)\,,$$

$$\beta := \sum_{i=7}^{9} x_{i-1}\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \in \Omega^2(U)\,,$$

$$\gamma := \sum_{i=4}^{6} x_{i+1}\,\mathrm{d}x_i \in \Omega^1(U)\,.$$

Berechnen Sie $\eta := \alpha \wedge \beta$ und $\omega := \alpha \wedge \gamma$ und $\eta \wedge \omega$ und $\mathrm{d}\eta$

(jeweils in der Form $\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in I(k,n)} f_{i_1,\dots,i_k}\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ mit $f_{i_1,\dots,i_k} \in C^\infty(U,\mathbb{R})$).

... weiter auf der nächsten Seite!

Aufgabe 51: Gradient, Rotation und Divergenz als äußere Ableitungen. (10 Punkte)

U sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{X}(U) := C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ der Vektorfelder auf U, sowie die Abbildungen

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\colon C^\infty(U,\mathbb{R}) &\to \mathfrak{X}(U)\,, & \operatorname{grad}(f) &:= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right),\\
\operatorname{rot}\colon \mathfrak{X}(U) &\to \mathfrak{X}(U)\,, & \operatorname{rot}(X) &:= \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right),\\
\operatorname{div}\colon \mathfrak{X}(U) &\to C^\infty(U,\mathbb{R})\,, & \operatorname{div}(X) &:= \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\,.
\end{aligned}$$

($\operatorname{grad}(f)$ ist der **Gradient** der Funktion f; $\operatorname{rot}(X)$ ist die **Rotation** des Vektorfelds $X = (X_1, X_2, X_3)$; $\operatorname{div}(X)$ ist die **Divergenz** des Vektorfelds X.)

Wir definieren $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ durch

$$\begin{aligned}
\iota_1\colon \mathfrak{X}(U) &\to \Omega^1(U)\,, & \iota_1(X) &:= X_1\,\mathrm{d}x_1 + X_2\,\mathrm{d}x_2 + X_3\,\mathrm{d}x_3\,,\\
\iota_2\colon \mathfrak{X}(U) &\to \Omega^2(U)\,, & \iota_2(X) &:= X_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + X_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + X_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\,,\\
\iota_3\colon C^\infty(U,\mathbb{R}) &\to \Omega^3(U)\,, & \iota_3(f) &:= f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\,.
\end{aligned}$$

(Diese $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ sind offensichtlich $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismen.)

Beweisen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(U,\mathbb{R}) \arrow[r, "\operatorname{grad}"] \arrow[d, "="'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\operatorname{rot}"] \arrow[d, "\cong"', "\iota_1"] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\operatorname{div}"] \arrow[d, "\cong"', "\iota_2"] & C^\infty(U,\mathbb{R}) \arrow[d, "\cong"', "\iota_3"] \\
\Omega^0(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^3(U)
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$ und $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$.