Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Analysis III, Wintersemester 2015/16

Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 11

Abgabe der Lösungen: 26. 1. 2016

Aufgabe 42. (6 Punkte)

Beweisen Sie: Ein metrischer Raum (X,d) ist genau dann zusammenhängend, wenn für jeden diskreten Raum (Y,d_Y) jede stetige Abbildung $f\colon X\to Y$ konstant ist.

Aufgabe 43. (6 Punkte)

Es sei $n\in\mathbb{N}$ und $r\in\mathbb{N}_{\geq 1}\cup\{\infty\}$. Beweisen Sie: Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine n-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wenn sie offen in $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 44. (6 Punkte)

Es seien $n_0,n_1,m\in\mathbb{N}$ mit $n_0\neq n_1$. Beweisen Sie: Wenn M eine n_0-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und eine n_1-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ ist, dann ist $M=\varnothing$.

Aufgabe 45. (6 Punkte)

Es sei $m\in\mathbb{N}$ und $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Beweisen Sie: Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist genau dann eine 0-dimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$, wenn sie diskret ist.

Aufgabe 46. (6 Punkte)

Für $r,R\in\mathbb{R}_{>0}$ mit $r<R$ sei

$$T_{R,r} := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=r^2\right\}.$$

Beweisen Sie, dass $T_{R,r}$ eine kompakte Hyperfläche in $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 47. (10 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung $w\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ mit $w(t) := \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}$. Beweisen Sie:

(a) w ist eine Immersion, aber $w(\mathbb{R})$ ist keine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

(b) $\tilde{w} := w|_{]-\pi,\pi/2[}$ ist eine injektive Immersion, aber das Bild von $\tilde{w}$ ist keine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Hinweis. Zählen Sie (Weg-)Zusammenhangskomponenten.