Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 9

Abgabe der Lösungen: 12. 1. 2016

Aufgabe 33. (2 + 4 + 4 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Menge $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 2x,\ 1 < x + y < 3\}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\psi\colon V \to \psi(V)$ mit $\psi(x,y) := \left(\frac{y}{x}, x+y\right) \in \mathbb{R}^2$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

(c) Berechnen Sie $\int_V \frac{y}{x}\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$.

Aufgabe 34: Maßräume, die nicht σ-endlich sind, bergen Gefahren. (10 Punkte)

Es sei $X := Y := I := [0,1]$ und $\mathscr{A} := \mathscr{L}(\mathbb{R})\big|_X$ und $\mathscr{B} := \mathfrak{P}(Y)$ und $\mu := \lambda_1\big|_{\mathscr{A}}$. Wir betrachten die Maßräume $(X, \mathscr{A}, \mu)$ und $(Y, \mathscr{B}, \nu)$, wobei ν das Zählmaß auf Y ist; und die Abbildung $f := 1_D\colon X \times Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, wobei $D := \{(x,x) \mid x \in I\}$. Beweisen Sie:

(a) f ist messbar bezüglich $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

(b) $\int_X \int_Y f(x,y)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x) = 1$.

(c) $\int_Y \int_X f(x,y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y) = 0$.

(d) Es gibt zwei verschiedene Maße τ_0, τ_1 auf $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, sodass $\tau_i(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ für alle $A \in \mathscr{A}$ und $B \in \mathscr{B}$ und $i \in \{0,1\}$ gilt.

Hinweis zu (d). Definieren Sie die Maße durch Integration.

Aufgabe 35. (10 Punkte)

Es sei $p \in [1, \infty]$. Geben Sie eine Borel-messbare Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_{>0}$ an, sodass

$$\begin{aligned} \forall r \in \left[1, p\right[\colon\ & f \in \mathscr{L}^r([0,1], \mathbb{R}; \lambda_1)\,, \\ & f \notin \mathscr{L}^p([0,1], \mathbb{R}; \lambda_1)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 36. (10 Punkte)

Beweisen Sie Satz 1.9.15: *$(X, \mathscr{A}, \mu)$ sei ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$, und es sei $f \in L^\infty(X, \mathbb{R}; \mu)$. Dann gilt*

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p(X,\mathbb{R};\mu)} = \|f\|_{L^\infty(X,\mathbb{R};\mu)}\,.$$

Hinweis. Betrachten Sie für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ die Menge $A_\varepsilon := \{x \in X \mid |f(x)| \geq \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\}$ und zeigen Sie $\|f\|_{L^p} \geq \left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\right)\mu(A_\varepsilon)^{1/p}$.