Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 8

Abgabe der Lösungen: 5. 1. 2016

Aufgabe 29. (8 Punkte)
Für
$$Z := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \in]-1,2],\ 2x^2 + z^2 - 2z \le 3\right\}$$
berechnen Sie $\int_Z y^2 \, \mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)$.

Aufgabe 30. ($2+2+2+2$ Punkte, plus 4 Punkte für die Berechnung der Integrale)
Die Funktion $f\colon]0,1] \times]0,1] \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y) := \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$ definiert. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $x \in]0,1]$ ist $f(x,.)\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar und uneigentlich Riemann-integrierbar. Für jedes $y \in]0,1]$ ist $f(.,y)\colon]0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar und uneigentlich Riemann-integrierbar.

(b) Die durch $x \mapsto \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ gegebene Abbildung $]0,1] \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar und uneigentlich Riemann-integrierbar. Die durch $y \mapsto \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$ gegebene Abbildung $]0,1] \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar und uneigentlich Riemann-integrierbar.

(c) Das doppelte uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ist gleich dem doppelten Lebesgue-Integral $\displaystyle\int_{]0,1]} \int_{]0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)$. Das doppelte uneigentliche Riemann-Integral $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ ist gleich dem doppelten Lebesgue-Integral $\displaystyle\int_{]0,1]} \int_{]0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ und $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie:

(d) f ist Lebesgue-messbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 31. (10 Punkte)
Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathbf{B}_r^n(p) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x-p| \le r\right\}$ den abgeschlossenen Ball mit Radius r und Mittelpunkt p.

Berechnen Sie $\lambda_3\Big(\mathbf{B}_1^3(0) \cap \big(\mathbf{B}_r^2(0) \times \mathbb{R}\big)\Big)$ im Fall $r \in]0,1[$.

Aufgabe 32. (10 Punkte)
Für $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $r < R$ sei
$$X_{R,r} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 \le r^2\right\}.$$
Berechnen Sie $\lambda_3(X_{R,r})$.