Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 7

Abgabe der Lösungen: 15. 12. 2015

Aufgabe 24. (10 Punkte)
Wir betrachten die Punkte $p_1 := (1,1)$, $p_2 := (1,\pi+1)$, $p_3 := (\pi+1,1)$ in $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Menge

$$A := \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i p_i \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \sum_{i=1}^{3} a_i = 1 \right\}.$$

Berechnen Sie

$$\int_A \big((x-1)(y-1) - 3\cos(x+y-2)\big)\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

Aufgabe 25. (10 Punkte)
Skizzieren Sie die Menge

$$X := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \wedge \big(x \leq 0 \vee |y| \leq x\big) \right\}$$

und berechnen Sie $\lambda_2(X)$.

Aufgabe 26. (4 Punkte)
X sei eine Menge. Es sei $x \in X$. Das Maß δ_x aus Aufgabe 23(a) heißt das **Diracmaß** auf X zum Punkt x. Berechnen Sie für jede Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ das Integral $\int_X f \,\mathrm{d}\delta_x$.

Aufgabe 27. (6 Punkte)
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, $\rho\colon X \to [0,\infty]$ sei $\mathscr{A}$-messbar. Beweisen Sie: Die durch

$$\mu_\rho(A) := \int_A \rho \,\mathrm{d}\mu$$

definierte Abbildung $\mu_\rho\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ ist ein Maß auf $\mathscr{A}$. Für jede $\mathscr{A}$-messbare Funktion $\tau\colon X \to [0,\infty]$ gilt $(\mu_\rho)_\tau = \mu_{\rho\tau}$.

Aufgabe 28. $(2+4+4$ Punkte$)$
$(X, \mathscr{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, $(Y, \mathscr{B})$ sei ein messbarer Raum, $\varphi\colon (X,\mathscr{A}) \to (Y,\mathscr{B})$ sei eine messbare Abbildung. Beweisen Sie:

(a) Die durch $(\varphi_*\mu)(B) := \mu(\varphi^{-1}(B))$ definierte Abbildung $\varphi_*\mu\colon \mathscr{B} \to [0,\infty]$ ist ein Maß auf $\mathscr{B}$.

(b) $f\colon Y \to [0,\infty]$ sei $\mathscr{B}$-messbar. Dann ist $f \circ \varphi\colon X \to [0,\infty]$ $\mathscr{A}$-messbar mit

$$\int_Y f \,\mathrm{d}(\varphi_*\mu) = \int_X f \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

(c) $f\colon Y \to \mathbb{R}$ sei $\varphi_*\mu$-integrierbar. Dann ist $f \circ \varphi\colon X \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar und es gilt (1).