Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 5

Abgabe der Lösungen: 1. 12. 2015

Aufgabe 16. (7 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{x^3} & \text{falls } y=3 \text{ und ein } n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ existiert mit } x = \frac{1}{n} \\ \left|\sin(x+y^2)-2\right| & \text{sonst} \end{cases}$$

Borel-messbar ist.

Aufgabe 17. (7 Punkte)

Beweisen Sie 1.8.1 aus der Vorlesung: $(X,\mathscr{A},\mu)$ *sei ein Maßraum. Für* $k \in \{0,1\}$ *seien* $n(k) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ *und* $c_{k,1},\dots,c_{k,n(k)} \in [0,\infty]$ *und* $A_{k,1},\dots,A_{k,n(k)} \in \mathscr{A}$. *Wenn* $\sum_{i=1}^{n(0)} c_{0,i} 1_{A_{0,i}} = \sum_{i=1}^{n(1)} c_{1,i} 1_{A_{1,i}}$, *dann*

$$\sum_{i=1}^{n(0)} c_{0,i}\,\mu(A_{0,i}) = \sum_{i=1}^{n(1)} c_{1,i}\,\mu(A_{1,i})\,.$$

Aufgabe 18. (6 + 8 Punkte)

(a) Für $i \in \{0,1\}$ sei (X_i,ρ_i) ein metrischer Raum, und $H[X_i]^d$ sei das äußere Maß auf X_i aus Aufgabe 10. Beweisen Sie: Für jede Isometrie (d.h. bijektive isometrische Einbettung) $f\colon (X_0,\rho_0) \to (X_1,\rho_1)$, jede Menge $A \subseteq X_0$ und jedes $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $H[X_1]^d(f(A)) = H[X_0]^d(A)$.

(b) (X,ρ) sei ein metrischer Raum, und H^d sei das äußere Maß auf X aus Aufgabe 10. Für jede Menge $A \subseteq X$ ist die Zahl

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) := \inf\left\{d \in \mathbb{R}_{\geq 0} \;\middle|\; H^d(A) = 0\right\}$$

gleich $\sup\left\{d \in \mathbb{R}_{\geq 0} \;\middle|\; H^d(A) = \infty\right\} \in [0,\infty]$.

... weiter auf der nächsten Seite!

Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Aufgabe 19. $(3+3+2+4$ Punkte$)$

A sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Relation $\sim_A$ auf A, sodass genau dann $x \sim_A y$ gilt, wenn es ein Intervall $I \subseteq A$ mit $x \in I$ und $y \in I$ gibt.

(a) Zeigen Sie: $\sim_A$ ist eine Äquivalenzrelation auf A. Jede Äquivalenzklasse von $\sim_A$ ist ein Intervall.

Wir bezeichnen die Menge der $\sim_A$-Äquivalenzklassen mit $\mathscr{Z}[A]$. Für jedes beschränkte Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit Rand $\partial I = \{a, b\}$ bezeichne $m(I)$ den Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ von I.

Es sei $\delta \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$. Wir definieren rekursiv für $i \in \mathbb{N}$ Mengen $C_{\delta,i} \subseteq [0,1]$:

$$C_{\delta,0} := [0,1]\,, \qquad C_{\delta,i+1} := C_{\delta,i} \Big\backslash \bigcup_{I \in \mathscr{Z}[C_{\delta,i}]} \Big]m(I) - \tfrac{1}{2}\delta^{i+1}, m(I) + \tfrac{1}{2}\delta^{i+1}\Big[\,, \qquad C_\delta := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_{\delta,i}\,.$$

Beweisen Sie:

(b) Das Innere von C_δ in $\mathbb{R}$ ist leer.

(c) C_δ ist eine kompakte überabzählbare Teilmenge von $[0,1]$.

(d) $C_\delta \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda_1(C_\delta) = \frac{1-3\delta}{1-2\delta}$.