Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Analysis III, Wintersemester 2015/16

Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen: 24. 11. 2015

Aufgabe 12. (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

(a) Beweisen Sie Teil 1 von Lemma 1.4.15: Wenn (X,d) ein metrischer Raum ist, dann gilt $\mathscr{B}(X) = \sigma\mathrm{Alg}\big(\{A \subseteq X \mid A \text{ ist abgeschlossen}\}\big)$.

(b) Beweisen Sie Teil 2 von Lemma 1.4.15: Wenn (X,d) ein σ-kompakter metrischer Raum ist, dann gilt $\mathscr{B}(X) = \sigma\mathrm{Alg}\big(\{A \subseteq X \mid A \text{ ist kompakt}\}\big)$.

(c) Beweisen Sie Teil 3 von Lemma 1.4.15:
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\mathrm{Alg}(\mathscr{F}^n) = \sigma\mathrm{Alg}\big(\{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist ein } n\text{-dimensionaler Quader}\}\big)$.

(d) Beweisen Sie Fakt 1.7.2: Wenn $(X,\mathscr{A})$ ein messbarer Raum und Y eine Teilmenge von X ist, dann ist $\mathscr{A}|_Y$ eine σ-Algebra auf Y.

(e) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

(f) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 13. (7 Punkte)

(X,ρ) sei ein metrischer Raum, H^0 sei das äußere Maß auf X aus Aufgabe 10. Beweisen Sie: H^0 ist ein Maß, nämlich das Zählmaß auf X.

Aufgabe 14. (10 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Standardmetrik betrachten wir das äußere Maß H^n aus Aufgabe 10 und den davon (gemäß Satz 1.3.9) induzierten Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathscr{A}_{H^n}, \check{H}^n)$. Beweisen Sie: Es gibt ein $c_n \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $\mathscr{A}_{H^n} = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\check{H}^n = c_n \lambda_n$.

Aufgabe 15. (2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 3 Punkte)

Wir betrachten

$$C := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \;\middle|\; \forall\, i \in \mathbb{N}_{\geq 1} \colon\, a_i \in \{0,2\} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie:

(a)

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{i-1}-1} \left] \frac{3k+1}{3^i}, \frac{3k+2}{3^i} \right[.$$

(b) Das Innere von C in $\mathbb{R}$ ist leer.

(c) C ist eine kompakte Teilmenge von $[0,1]$.

(d) C ist überabzählbar.

(e) $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(f) $\lambda_1(C) = 0$.