Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Analysis III, Wintersemester 2015/16

Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 3

Abgabe der Lösungen: 17. 11. 2015

Aufgabe 9. (5 + 5 Punkte)

(a) Beweisen Sie den Rest von Lemma 1.4.3: Wenn μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathscr{R}$ ist, dann gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$ für jedes $A \in \mathscr{R}$.

(b) Geben Sie einen Inhalt μ auf einem Ring $\mathscr{R}$ an, sodass nicht $\mu^*|_{\mathscr{R}} = \mu$ gilt.

Aufgabe 10. (3 + 7 + 6 Punkte)

(X, ρ) sei ein metrischer Raum. Es sei $A \subseteq X$. Der **Durchmesser von** A ist

$$\operatorname{diam}_\rho(A) := \sup\left\{\rho(x,y) \,\middle|\, x, y \in A\right\} \in [0,\infty]\,.$$

Eine **Überdeckung von** A ist eine Menge $\mathscr{U} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ mit $A \subseteq \bigcup \mathscr{U}$. Für $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ seien

$$\mathscr{E}_\delta := \left\{E \in \mathfrak{P}(X) \,\middle|\, \operatorname{diam}_\rho(E) \leq \delta\right\},$$

$$H^d_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{E\in\mathscr{U}} \left(\operatorname{diam}_\rho(E)\right)^d \,\middle|\, \mathscr{U} \subseteq \mathscr{E}_\delta \text{ ist eine abzählbare Überdeckung von } A\right\} \in [0,\infty]\,,$$

$$H^d(A) := \sup\left\{H^d_\delta(A) \,\middle|\, \delta \in \mathbb{R}_{>0}\right\} \in [0,\infty]\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $A \subseteq X$ gilt: $H^d(A) = \lim_{\delta\to 0} H^d_\delta(A)$.

(b) Beweisen Sie, dass $H^d\colon \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß auf X ist.

(c) Betrachten wir den Fall, dass (X,ρ) die Menge $\mathbb{R}^2$ mit der Standardmetrik ist (siehe Aufgabe 11) und $A = \mathbf{S}^1 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| = 1\right\}$. Zeigen Sie:

$$H^d(A) \begin{cases} = \infty & \text{für } d \in [0,1[\\ \in\,]0,\infty[& \text{für } d = 1 \\ = 0 & \text{für } d \in \mathbb{R}_{>1} \end{cases}.$$

Aufgabe 11. (2 + 2 + 1 + 9 Punkte)

(X_0, d_0) und (X_1, d_1) seien metrische Räume. Eine **isometrische Einbettung** $f\colon (X_0,d_0) \to (X_1,d_1)$ ist eine Abbildung $f\colon X_0 \to X_1$, sodass für alle $x, y \in X_0$ gilt: $d_1(f(x), f(y)) = d_0(x,y)$.

Beweisen Sie:

(a) Jede isometrische Einbettung ist injektiv.

(b) Geben Sie einen metrischen Raum (X,d) und eine isometrische Einbettung $f\colon (X,d) \to (X,d)$ an, die nicht surjektiv ist.

(c) Jede euklidische Bewegung ist bijektiv.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne d die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ (d.h., $d(x,y) := |x-y| := \langle x-y, x-y\rangle^{1/2}$). Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine euklidische Bewegung, wenn sie eine isometrische Einbettung $(\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ ist.

Hinweis. In (d) betrachten Sie $A := f - f(0)$. Zeigen Sie zuerst, dass immer $\langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ gilt. Folgern Sie daraus, dass A linear ist.