Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Analysis III, Wintersemester 2015/16

Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 1

Abgabe der Lösungen: 3. 11. 2015

Wie üblich sind alle Antworten zu beweisen.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

(a) $(I_k)_{k\in J}$ sei eine Familie paarweise disjunkter Mengen, es sei $I = \bigcup\{I_k \mid k \in J\}$, und $(x_i)_{i\in I}$ sei eine Familie in $[0,\infty]$. Beweisen Sie:

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in J}\sum_{i\in I_k} x_i\,.$$

(b) I und J seien Mengen, $\big(a_{i,j}\big)_{(i,j)\in I\times J}$ sei eine Familie in $[0,\infty]$. Beweisen Sie:

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}\,.$$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

I sei eine Menge, $(x_i)_{i\in I}$ sei eine Familie in $[0,\infty]$ mit $\sum_{i\in I} x_i < \infty$.

Beweisen Sie, dass $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ abzählbar ist.

Aufgabe 3. (5 + 8 Punkte)

(a) Geben Sie eine σ-Algebra $\mathscr{A}$ auf $\mathbb{R}$ an, für die gilt: $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathscr{A} \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

(b) Geben Sie alle σ-Algebren $\mathscr{A}$ auf $\{0,1,2,3\}$ an, die $\{0\} \in \mathscr{A}$ erfüllen.

Aufgabe 4. (8 Punkte)

X sei eine Menge. Ein **Übermaß auf** X ist eine Abbildung $\mu\colon \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$, sodass für jede Menge $\mathscr{M} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, deren Elemente paarweise disjunkt sind, gilt: $\mu\big(\bigcup\mathscr{M}\big) = \sum_{A\in\mathscr{M}} \mu(A)$.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Existiert ein Übermaß μ auf $\mathbb{R}^n$, sodass $\mu(Q) = |Q|$ für jeden Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt?

Bemerkung. Der Begriff „Übermaß" ist nicht üblich; wir verwenden ihn nur in dieser Aufgabe.