Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
13. Dezember 2013
Blatt 9

Übungen zu Analysis III

36. (12 Punkte) Sei A eine beschränkte Borel-Menge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(A) > 0$.

    (a) Zeigen Sie: Die Funktionen $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j \chi_A(x)$ von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ sind integrierbar für $j = 1, \dots, n$. Wir schreiben:
    $$\int_A x \mathrm{d}x :\ = \left(\int_A x_1 \mathrm{d}x, \dots, \int_A x_n \mathrm{d}x \right) \in \mathbb{R}^n$$
    und nennen $\dfrac{1}{\lambda^n(A)} \displaystyle\int_A x \mathrm{d}x$ den **Schwerpunkt** von A.

    (b) Ist S der Schwerpunkt von A und ist $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\varphi(x) :\ = a + T(x)$, wobei $a \in \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so hat $\varphi(A)$ den Schwerpunkt $\varphi(S)$.

    (c) Bestimmen Sie die Schwerpunkte einer Kugel, einer Halbkugel und eines Volltorus in $\mathbb{R}^3$.

37. (10 Punkte) Sei A eine beschränkte Borel-Menge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lambda^2(A) > 0$ und mit der Eigenschaft
    $$r > 0 \quad \text{für alle } (r, z) \in A.$$
    Sei R die erste Koordinate des Schwerpunkts von A, und sei V der Rotationskörper
    $$V :\ = \{(r \cos t, r \sin t, z) \mid (r, z) \in A, 0 \le t \le 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$
    Zeigen Sie, dass $V \in \mathcal{B}^3$ und dass
    $$\lambda^3(V) = 2\pi R \cdot \lambda^2(A)$$
    (**Erste Guldinsche Regel**). Welchen Rauminhalt hat also der Volltorus?

(bitte wenden!)

38. (6 Punkte) Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq q \leq p$ und sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{L}^p(X) \subseteq \mathscr{L}^q(X)$.

39. (2+2+4 Punkte) Sei $N \in \mathbb{N}$.

    (a) Finden Sie eine beschränkte diskrete unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}^N$.

    (b) Finden Sie eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^N$, die nicht diskret ist.

    (c) Zeigen Sie, dass jede diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ höchstens abzählbar ist.

40. (4 Punkte) Sei X ein metrischer Raum und (a_n) eine Cauchy-Folge in X. Zeigen Sie: Wenn (a_n) eine konvergente Teilfolge besitzt, so konvergiert die Folge (a_n).

Abgabe: Freitag, den 20. Dezember 2013, 10:20 Uhr