Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2013/14
15. November 2013
Blatt 5

# Übungen zu Analysis III

17. (8 Punkte) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^2$. Zeichnen Sie die ersten 3 Funktionen der im Beweis von Satz 1 von §5 konstruierten wachsenden Folge $(g_n)$ nicht-negativer Treppenfunktionen mit $f = \sup\limits_n g_n$.

18. (12 Punkte) Sei $(a_n)$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$.

    (a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Genau dann ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

    (1) Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n < a + \varepsilon$.

    (2) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > a - \varepsilon$.

    (b) Zeigen Sie: Genau dann ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, wenn es für jedes $M \in \mathbb{R}$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > M$ gibt.

    (c) Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie: Genau dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

    (d) Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ für

    (1) $a_n := (-1)^n(1 + 2^{-n})$,

    (2) $a_n := \mathrm{Re}\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{3} \cdot n\right)\right)$ .

19. (8 Punkte) Finden Sie eine Folge $(f_n)$ von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass die Reihe $\sum\limits_n f_n(x) =: f(x)$ für jedes $x \in [0,1]$ konvergiert und so dass $f$ beschränkt, aber nicht Riemann-integrierbar ist.

(bitte wenden!)

20. (6 Punkte) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f$ eine integriebare numerische Funktion auf $X$. Zeigen Sie, dass $f$ fast überall endlich ist.

21. (6 Punkte) Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1, \lambda^1)$. Finden Sie zwei Folgen von nicht-negativen Treppenfunktionen, die punktweise gegen dieselbe Grenzfunktion konvergieren, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\lambda^1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}\lambda^1$ existieren und verschieden sind.
(Vgl. §5, Lemma 2).

**Abgabe:** Freitag, den 22. November 2013, 10:20 Uhr