

Übungen zu Analysis III

13. (a) (3 Punkte) Sei $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass A eine Borel-Menge in $\mathbb{R}^2$ ist und bestimmen Sie $\lambda^2(A)$.
- (b) (3 Punkte) Sei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$. Zeigen Sie, dass B eine Borel-Menge in $\mathbb{R}^2$ ist und bestimmen Sie $\lambda^2(B)$.
- (c) (5 Punkte) Wir identifizieren in der üblichen Weise $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ und $A \in \mathcal{B}^2$, so ist $zA := \{za \mid a \in A\} \in \mathcal{B}^2$. Bestimmen Sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ die reelle Zahl ξ mit

$$\lambda^2(zA) = \xi \cdot \lambda^2(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}^2.$$

14. (11 Punkte) Gegeben seien die folgenden 4 Vektoren in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 2, 0, 0), \quad v_2 = (1, 2, 3, 0), \quad v_3 = (1, 2, 3, 4), \quad v_4 = (5, -1, 0, 0).$$

$$\text{Sei } P := \left\{ \sum_{i=1}^4 t_i v_i \mid 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, 4 \right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Berechnen Sie das Volumen $\lambda^4(P)$.

15. (a) (5 Punkte) Wir definieren $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f (bzgl. der σ -Algebra $\mathcal{B}^1$) eine messbare numerische Funktion ist.

- (b) (5 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f eine messbare numerische Funktion ist.

16. (8 Punkte) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 2 von § 4.

Abgabe: Freitag, den 15. November 2013, 10:20 Uhr