Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2013
10. Mai 2013
Blatt 5

Übungen zu Analysis II

19. (4 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x, y) := e^{xy}.$$

Berechnen Sie die Richungsableitung $D_v f(\xi)$ für

(a) $\xi = (0, 0), v = (1, 1)$,

(b) $\xi = (1, 1), v = (2, -1)$.

20. (6 Punkte) Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) := (e^{xy}, x + y).$$

Beschreiben Sie möglichst einfach die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die die Matrix $Df(x, y)$ invertierbar ist.

21. (10 Punkte) Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Wir wissen aus Aufgabe 12, dass f stetig in $(0, 0)$ ist. Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar, aber nicht differenzierbar ist.

22. (10 Punkte) Sei U offen in $\mathbb{R}^3$ und $g = (g_1, g_2, g_3) : U \to \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar. Man definiert $\operatorname{div} g : U \to \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{div} g(x) := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x)$$

und $\operatorname{rot} g : U \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\operatorname{rot} g(x) := \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial g_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(x), \ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) \right).$$

Bitte wenden!

Zeigen Sie:

(a) Ist $f : U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2, so ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$.

(b) Ist $g : U \to \mathbb{R}^3$ von der Klasse C^2, so ist $\operatorname{div}\operatorname{rot} g = 0$.

23. (10 Punkte) Wir definieren eine glatte Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$g(x, y, z) := (yze^{xy}, xze^{xy}, e^{xy}).$$

(a) Zeigen Sie, dass rot $g = 0$.

(b) Finden Sie eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$g = \operatorname{grad} f.$$

Abgabe: Freitag, den 17. Mai 2013, 10:20 Uhr
Besprechung: 22. / 23. Mai 2013