Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2013
3. Mai 2013
Blatt 4

Übungen zu Analysis II

14. (12 Punkte) Berechnen Sie für die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen der Ordnung 1 und 2:

   (a) $f(x, y) = x + y^3$
   (b) $f(x, y) = xy^3$
   (c) $f(x, y) = \sin(x + y^3)$
   (d) $f(x, y) = \sin(xy^3)$.

15. (10 Punkte)

   (a) Warum gibt es keine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Klasse C^2 mit
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^4 + x^3 y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4 + y^2 + 1$$
   für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?
   Folgern Sie, dass es überhaupt keine partiell differenzierbare Funktion mit dieser Eigenschaft gibt.

   (b) Finden Sie alle partiell differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^4 + x^3 y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + y^2 + 1$$
   für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

16. (10 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass f in ganz $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist und dass $D_1 D_2\, f(0, 0) \neq D_2 D_1\, f(0, 0)$.

17. (8 Punkte) Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := \max\{x, y\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass f im Punkt (1,0) partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen im Punkt (1,0).
   (b) Zeigen Sie, dass f im Punkt (1,1) nicht partiell differenzierbar ist.

Abgabe: Freitag, den 10. Mai 2013, 10:20 Uhr
Besprechung: 15. / 23. Mai 2013