Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2013
26. April 2013
Blatt 3

Übungen zu Analysis II

9. (8 Punkte) Sei X ein metrischer Raum und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen.
   (a) Führen Sie den Beweis von § 3, Satz 3 der Vorlesung aus, d. h. zeigen Sie: Die Menge $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ ist abgeschlossen in X.
   (b) Zeigen Sie: Die Menge $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ ist offen in X.

10. (8 Punkte) Diese Aufgabe schließt an Aufgabe 5 an. Sei (X, d) ein metrischer Raum.
    (a) Ist A eine nicht-leere Teilmenge von X und definiert man $f : X \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := d(x, A)$, so ist f stetig.
    (b) Sind A, B abgeschlossene, disjunkte Teilmengen von X, so gibt es offene Teilengen U und V von X mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

11. (6 Punkte) Sei X ein metrischer Raum, $a \in X$, $r > 0$. Zeigen Sie, dass $\bar{B}_r(a)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

12. (12 Punkte) Wir definieren Abbildungen $f_1, \ldots, f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
    $f_1(x, y) := x,$
    $f_2(x, y) := x^2,$
    $f_3(x, y) := x^2 y,$
    $f_4(x, y) := xy(x^2 - y^2)$
    und definieren $g_1, \ldots, g_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
    $$g_i(x, y) :\, = \begin{cases} \dfrac{f_i(x, y)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
    Untersuchen Sie, für welche i die Funktion g_i an der Stelle $(0, 0)$ stetig ist.

13. (6 Punkte) Sei V ein normierter Raum. Zeigen Sie: Die Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := ||x||$ ist stetig.

Abgabe: Freitag, den 3. Mai 2013, 10:20 Uhr
Besprechung: 8. / 16. Mai 2013