Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2013
19. April 2013
Blatt 2

Übungen zu Analysis II

5. (9 Punkte) Sei (X, d) ein metrischer Raum.

   (a) Zeigen Sie: Sind $x, y, z \in X$, so ist $|\, d(x, z) - d(y, z)\, | \leq d(x, y)$.

   (b) Ist A eine nicht-leere Teilmenge von X und $x \in X$, so sei

   $$d(x, A) := \inf \{d(x, a) \,|\, a \in A\}\,.$$

   Zeigen Sie: Sind $x, y \in X$, so ist

   $$|\, d(x, A) - d(y, A)\, | \leq d(x, y).$$

   (c) Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der üblichen (zur Euklidischen Norm gehörigen) Metrik d und sei $A := B_1(a)$ mit $a := (1, 0)$. Berechnen Sie $d(x, A)$ für $x = (0, 0), x = (3, 0)$ und $x = (0, 1)$.

6. (9 Punkte) Wir betrachten den Teilraum

   $$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \,\text{und}\, xy \neq 0\right\}$$

   von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand von A in $\mathbb{R}^2$.

7. (12 Punkte) Sei $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$.
   Als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ wird X zu einem metrischen Raum. Bestimmen Sie für jede der folgenden Teilmengen A_i von X $(i = 1, \ldots, 4)$, ob A_i offen und/oder abgeschlossen in X ist:

   $$A_1 := \{(x, y) \in X \,|\, y > 0\}$$
   $$A_2 := \{(x, y) \in X \,|\, y \leq 0\}$$
   $$A_3 := \{(x, y) \in X \,|\, x > 0\}$$
   $$A_4 := \left\{(x, y) \in X \,|\, y \leq x^2\right\}$$

Bitte wenden!

8. (10 Punkte) Eine Teilmenge A eines reellen Vektorraumes V heißt *konvex*, wenn gilt: Sind $x, y \in A$, so enthält A auch die Verbindungsstrecke $\{\lambda y + (1-\lambda)x \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ von x und y.

   (a) Ist V ein normierter Raum und $r > 0$, so sind die Mengen $B_r(0)$ und $\overline{B}_r(0)$ konvex.

   (b) Ist V ein normierter Raum, $a \in V$ und $r > 0$, so sind die Mengen $B_r(a)$ und $\bar{B}_r(a)$ konvex.

   (c) Ist $0 < p < 1$ und definiert man

$$\|v\|_p \colon = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$

   für $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so ist $\| \,.\, \|_p$ **keine** Norm auf $\mathbb{R}^n$, falls $n \geq 2$.

Abgabe: Freitag, den 26. April 2013, 10:20 Uhr
Besprechung: 8. / 2. Mai 2013