Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2013
5. Juli 2013
Blatt 13

Übungen zu Analysis II

54. (8 Punkte) Wir definieren $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
$$F(x,y) := xe^x + ye^y + xy.$$
Zeigen Sie: Für kleine $\varepsilon > 0$ gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $f :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Diese Funktion ist von der Klasse C^∞. Berechnen Sie $f'(0)$.

55. (15 Punkte) Wir definieren $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
$$F(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2).$$
   (a) Sei L die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^2$, für die das Produkt der Entfernungen von den Punkten $(1,0)$ und $(-1,0)$ gleich 1 ist. Zeigen Sie, dass $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$ ist.
   (b) Bestimmen Sie alle Punkte (x,y) von L mit $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$.
   (c) Zeigen Sie, dass L eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.
   (d) Finden Sie alle Punkte (x,y) von L, in denen die zweite Koordinate maximal ist.
   (e) Fertigen Sie eine Skizze von L an.

56. (8 Punkte) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) := z^2$. Indem wir $\mathbb{C}$ in der üblichen Weise mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, wird f zu einer C^∞-Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$.
   (a) Berechnen Sie $Df(x,y)$ und bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $Df(x,y)$ invertierbar ist.
   (b) Zeigen Sie: Ist A eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, so ist auch $f(A)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

57. (9 Punkte) Verallgemeinern Sie die Aufg. 56, indem Sie für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die durch $f(z) := z^n$ definierte Abbildung betrachten.

Abgabe: Freitag, den 12. Juli 2013, 10:20 Uhr