Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2013
12. April 2013
Blatt 1

Übungen zu Analysis II

1. (9 Punkte)

   (a) Sei $v := (1, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$.
   Berechnen Sie $||\, v\,||_1, ||\, v\,||_2$ und $||\, v\,||_\infty$.

   (b) Bestimmen Sie die Menge aller $v \in \mathbb{R}^2$, für die $||\, v\,||_\infty = ||\, v\,||_2$.

   (c) Bestimmen Sie die Menge aller $v \in \mathbb{R}^2$, für die $||\, v\,||_2 = ||\, v\,||_1$.

2. (7 Punkte) Sei V ein reeller Vektorraum. Zeigen Sie:

   (a) Ist $||.||$ eine Norm auf V, ist $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und definiert man $||.||' : V \to \mathbb{R}$ durch
   $$||v||' := \lambda ||v||,$$
   so ist $||.||'$ eine Norm auf V. Eine Teilmenge von V ist genau dann offen bezüglich $||.||'$, wenn sie offen bezüglich $||.||$ ist.

   (b) Sind $||.||'$ und $||.||''$ zwei Normen auf V und definiert man $||.|| : V \to \mathbb{R}$ durch
   $$||v|| := ||v||' + ||v||'',$$
   so ist $||.||$ eine Norm auf V.

3. (12 Punkte) Sie $V = C[0, 1]$ der Raum der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

   (a) Durch
   $$||\, f\,||_\infty := \max \{|f(x)|\, | x \in [0, 1]\}$$
   erhält man eine Norm $||.||_\infty$ auf V.

   (b) Durch
   $$||\, f\,||_1 := \int_0^1 |f(x)| dx$$
   erhält man eine Norm $||.||_1$ auf V.

   (c) Ist $f \in V$, so ist $||f||_1 \le ||f||_\infty$.

   (d) Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $f \in V$ mit $||f||_\infty = 1$ und $||f||_1 \le \varepsilon$.

4. (12 Punkte) Sei V der Raum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die periodisch mit der Periode 2π sind, und sei V^1 der Unterraum von V, der aus den stetig differenzierbaren Funktionen besteht.

   (a) Zeigen Sie: Durch
   $$||f|| := \max \{|f(x)| \,|\, 0 \leq x \leq 2\pi\}$$
   erhält man eine Norm auf V.

   (b) Wir definieren eine Abbildung $||.||' : V_1 \to \mathbb{R}$ durch
   $$||f||' := ||f'||.$$
   Welche der vier Eigenschaften einer Norm erfüllt $||.||'$?

   (c) Wir definieren $|.| : V_1 \to \mathbb{R}$ durch
   $$|f| := ||f|| + ||f'||.$$
   Zeigen Sie, dass $|.|$ eine Norm ist.

   (d) Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $f \in V_1$ mit $|f| = 1$ und $||f|| \leq \varepsilon$.

Abgabe: Freitag, den 19. April 2013, 10:20 Uhr
Besprechung: 24. / 25. April 2013