

# Vorlesung Analysis II im Sommersemester 2013

Wilhelm Singhof

# Teil I: Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

## 1. Normierte und metrische Räume: Definitionen und Beispiele

**Def.** Sei  $V$  ein (reeller) Vektorraum. Eine *Norm* auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \| v \|,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- (1)  $\| v \| \geq 0$  für alle  $v \in V$ .
- (2)  $\| v \| = 0 \iff v = 0$ .
- (3)  $\| \alpha v \| = |\alpha| \cdot \| v \|$  für  $v \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (4)  $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$  für alle  $v, w \in V$  (*Dreiecksungleichung*).

Ein *normierter Raum* ist ein Paar  $(V, \| \cdot \|)$ , wobei  $V$  ein Vektorraum und  $\| \cdot \|$  eine Norm auf  $V$  ist. Meist sagt man: "Sei  $V$  ein normierter Raum" statt "sei  $(V, \| \cdot \|)$  ein normierter Raum".

**Beispiel:** Auf  $V = \mathbb{R}^n$  erhält man Normen  $\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_\infty$  und  $\| \cdot \|_2$  folgendermaßen: Ist  $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , so sei

$$\begin{aligned}\| v \|_1 &:= |x_1| + \dots + |x_n|, \\ \| v \|_\infty &:= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \\ \| v \|_2 &:= (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Um die Dreiecksungleichung für  $\| \cdot \|_2$ , die sog. *Euklidische Norm*, nachzuweisen, braucht man:

### Satz 1. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sind  $v = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , so ist

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \| v \|_2 \cdot \| w \|_2.$$

**Bem.** Für  $v \in \mathbb{R}^n$  ist  $\| v \|_\infty \leq \| v \|_2 \leq \| v \|_1 \leq n \cdot \| v \|_\infty$ .

Allgemeiner gilt: Zwei Normen  $\| \cdot \|$  und  $| \cdot |$  auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive reelle Zahlen  $a, A$  gibt mit

$$a \| v \| \leq | v | \leq A \| v \| \quad \forall v \in V.$$

**Def.** Sei  $X$  eine Menge. Eine *Metrik* auf  $X$  ist eine Abbildung

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden vier Eigenschaften:

- (I)  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$ .
- (II)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
- (III)  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in X$ .

(IV)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  für alle  $x, y, z \in X$  (*Dreiecksungleichung*).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(X, d)$ , wobei  $X$  eine Menge und  $d$  eine Metrik auf  $X$  ist. Man sagt oft „ $X$  ist metrischer Raum“ statt „ $(X, d)$  ist metrischer Raum“.

**Beispiel:** Sei  $V$  ein normierter Raum. Definiere  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Dann ist  $V$  ein metrischer Raum.

**Beispiel:** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $Y \subseteq X$ , so wird  $Y$  mit der Einschränkung von  $d$  auf  $Y \times Y$  ein metrischer Raum.

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $a \in X$  und  $r \in \mathbb{R}$  mit  $r > 0$ . Dann heißt die Menge

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

die *offene Kugel* und

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

die *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt  $a$  und Radius  $r$ .

## 2. Einige grundlegende topologische Begriffe

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$ . Dann heißt  $A$  *offen in  $X$* , wenn gilt: Ist  $x \in A$ , so existiert ein  $r > 0$  mit  $B_r(x) \subseteq A$ .

**Satz 1.** Eine offene Kugel in einem metrischen Raum  $X$  ist offen in  $X$ .

**Satz 2.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

- a)  $X$  und  $\emptyset$  sind offen in  $X$ .
- b) Ist  $I$  irgendeine Menge und sind die  $A_i$  mit  $i \in I$  offen in  $X$ , so ist auch  $\bigcup_{i \in I} A_i$  offen in  $X$ .
- c) Ist  $n \in \mathbb{N}$  und sind  $A_1, \dots, A_n$  offen in  $X$ , so ist  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  offen in  $X$ .

**Beispiel:**  $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$  ist offen in  $\mathbb{R}$ . Aber  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[ = \{0\}$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}$ .

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $x \in X$ . Eine Teilmenge  $U$  von  $X$  heißt *Umgebung* von  $x$  in  $X$ , wenn es eine offene Teilmenge  $A$  von  $X$  gibt mit

$$x \in A \subseteq U.$$

**Eigenschaften von Umgebungen:**

- (1) Sei  $x \in X$  und  $U \subseteq X$ . Dann sind äquivalent:
  - (a)  $U$  ist Umgebung von  $x$ .
  - (b) Es gibt ein  $r > 0$  mit  $B_r(x) \subseteq U$ .
- (2) Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.
- (3) Ist  $U$  Umgebung von  $x$  und  $V \supseteq U$ , so ist  $V$  Umgebung von  $x$ .
- (4) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von  $x$  ist eine Umgebung von  $x$ .

**Beispiel:** Betrachte  $\mathbb{R}^n$  mit den Normen  $\| \cdot \|_p$ ,  $p = 1, 2, \infty$ . Diese drei Normen besitzen dieselben offenen Mengen.

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $x \in X$ .

$x$  heißt *Häufungspunkt* von  $A$ , falls in jeder Umgebung von  $x$  ein von  $x$  verschiedener Punkt von  $A$  liegt.

$x$  heißt *Berührungspunkt* von  $A$ , falls in jeder Umgebung von  $x$  ein Punkt von  $A$  liegt.

**Bem.**  $x$  ist Berührungspunkt von  $A \iff x \in A$  oder  $x$  ist Häufungspunkt von  $A$ .

**Satz 3. und Def.** Sei  $X$  metrischer Raum,  $A \subseteq X$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $A$  enthält alle Häufungspunkte von  $A$ .
- (b)  $A$  enthält alle Berührungspunkte von  $A$ .
- (c)  $X \setminus A$  ist offen in  $X$ .

Wenn  $A$  diese Eigenschaften hat, so heißt  $A$  *abgeschlossen* in  $X$ .

**Satz 4.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

- 1)  $\emptyset$  und  $X$  sind abgeschlossen.
- 2) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- 3) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

**Satz 5.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A$  eine endliche Teilmenge von  $X$ . Dann ist  $A$  abgeschlossen in  $X$ .

**Def.** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem metrischen Raum  $X$ . Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt *Grenzwert* der Folge  $(x_n)$ , wenn eine der vier folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_n, x_0) < \varepsilon$  für  $n \geq N$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$  im Sinne von Analysis I.
3. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$  für  $n \geq N$ .
4. Für jede Umgebung  $U$  von  $x_0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in U$  für  $n \geq N$ .

Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. Wenn  $(x_n)$  den Grenzwert  $x_0$  besitzt, so sagt man, dass  $(x_n)$  gegen  $x_0$  *konvergiert* und schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  oder  $x_n \rightarrow x_0$ .

**Beispiel:** Sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit einer der Normen  $\| \cdot \|_p$ ,  $p = 1, 2, \infty$ . Sei  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$  mit  $x^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)$  und sei  $x^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n$ .

Genau dann ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$ , wenn für jedes  $\nu$  mit  $1 \leq \nu \leq n$  gilt:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_\nu^k = \xi_\nu^0$ .

**Bem.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $x \in X$ .

- a)  $x$  ist Berührungspunkt von  $A \iff$  es existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x$ .
- b)  $x$  ist Häufungspunkt von  $A \iff$  es existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $A$  mit  $x_n \neq x$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_n \rightarrow x$ .
- c)  $A$  ist abgeschlossen in  $X \iff$  ist  $(x_n)$  eine Folge in  $A$ , so dass  $x_0 = \lim x_n$  in  $X$  existiert, so ist  $x_0 \in A$ .

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $x \in X$ . Dann heißt  $x$  ein *innerer Punkt* von  $A$ , wenn  $A$  eine Umgebung von  $x$  ist. Sei  $\overset{\circ}{A}$  die Menge aller inneren Punkte von  $A$ ; sie heißt das *Innere* von  $A$ .

**Satz 6.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq X$ . Dann ist  $\overset{\circ}{A}$  die größte offene Teilmenge von  $X$ , die in  $A$  enthalten ist.

**Satz 7.** Ist  $V$  ein normierter Raum,  $x \in V$ ,  $r > 0$  und  $A := \overline{B}_r(x)$ , so ist  $\overset{\circ}{A} = B_r(x)$ .

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$ . Sei  $\overline{A}$  die Menge aller Berührungspunkte von  $A$  in  $X$ . Sie heißt der *Abschluss* von  $A$ .

**Satz 8.** a)  $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$ .

b)  $\overline{A}$  ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $A$  umfasst.

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$ ,  $x \in X$ .

$x$  heißt *Randpunkt* von  $A$  in  $X$ , wenn  $x$  Berührungspunkt von  $A$  und von  $X \setminus A$  ist.

Sei  $\partial A$  die Menge der Randpunkte von  $A$  in  $X$ , also  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ .

$\partial A$  heißt der *Rand* von  $A$  in  $X$ .

**Bem.**  $\partial A$  ist abgeschlossen in  $X$ .

$X$  ist die disjunkte Vereinigung von  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\partial A$  und  $(X \setminus A)^\circ$ .

### 3. Stetige Abbildungen

**Def.** Seien  $(X, d), (Y, d')$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $x_0 \in X$ . Dann heißt  $f$  *stetig im Punkt*  $x_0$ , wenn eine der folgenden 3 äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$ , so dass gilt: Ist  $x \in X$  mit  $d(x_0, x) < \delta$ , so ist  $d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ .
2. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$  mit  $f(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$ .
3. Zu jeder Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  mit  $f(U) \subseteq V$ .

Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von  $X$  stetig ist.

**Beispiele:** 1) Eine konstante Abbildung ist stetig.

2) Die identische Abbildung  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  ist stetig.

3) Seien  $X, Y, Z$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen,  $x_0 \in X$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $f(x_0)$  stetig ist, so ist  $g \circ f : X \rightarrow Z$  in  $x_0$  stetig.

**Satz 1.** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$ . Dann sind äquivalent:

- a)  $f$  ist stetig.
- b) Ist  $A$  offen in  $Y$ , so ist  $f^{-1}(A)$  offen in  $X$ .
- c) Ist  $B$  abgeschlossen in  $Y$ , so ist  $f^{-1}(B)$  abgeschlossen in  $X$ .
- d) Ist  $(x_n)$  eine konvergente Folge in  $X$ , so ist  $(f(x_n))$  konvergente Folge in  $Y$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ .

**Satz 2.** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f, g : X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $A := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  abgeschlossen in  $X$ .

**Satz 3.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $A := \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$  abgeschlossen in  $X$ .

**Bem.** Sei  $X$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung. Dann ist  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  mit Abbildungen  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir versehen  $\mathbb{R}^n$  mit einer der Normen  $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$ . Genau dann ist  $f$  stetig, wenn alle  $f_k$  stetig sind.

**Def.** Eine Teilmenge  $X$  eines normierten Raumes  $V$  heißt *beschränkt*, wenn es ein  $M \geq 0$  gibt mit  $\|v\| \leq M$  für alle  $v \in X$ .

**Satz 4.** Sei  $X$  eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann ist  $f(X)$  eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Insbesondere nimmt  $f$  auf  $X$  sein Maximum und sein Minimum an.

## 4. Partielle Ableitungen

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ . Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $U_i := \{t \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U\}$ .

Dann ist  $U_i$  eine offene Umgebung von  $x_i$  in  $\mathbb{R}$ .

Man definiert  $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F_i(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

$f$  heißt *im Punkt  $x$  partiell differenzierbar*, wenn für  $i = 1, \dots, n$  die Funktion  $F_i$  in  $x_i$  differenzierbar ist. Schreibe dann

$$D_i f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := F_i'(x),$$

und nenne dies die  *$i$ -te partielle Ableitung* von  $f$  in  $x$ .

$f$  heißt *partiell differenzierbar*, wenn es in jedem Punkt von  $U$  partiell differenzierbar ist.

**Bem.** a) Man berechnet die  $i$ -te partielle Ableitung, indem man  $f$  als Funktion der  $i$ -ten Variablen allein auffasst und die anderen Variablen konstant hält.

b) Für  $n = 2$  schreibt man meist  $(x, y)$  statt  $(x_1, x_2)$  und  $\frac{\partial f}{\partial x}$  statt  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}$  statt  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ . Für  $n = 3$  schreibt man oft  $(x, y, z)$  statt  $(x_1, x_2, x_3)$ .

**Beispiel:**  $f(x, y) = e^{xy} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$ .

**Beispiel:** Betrachte  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

In jedem Punkt  $(x, y) \neq (0, 0)$  ist  $f$  offensichtlich partiell differenzierbar.  $f$  ist aber auch in  $(0, 0)$  partiell differenzierbar:

$f_1(\xi) = f(\xi, 0) = 0$  und  $f_2(\xi) = f(0, \xi) = 0$  für alle  $\xi \in \mathbb{R} \implies D_1 f(0, 0) = 0$  und  $D_2 f(0, 0) = 0$ .

$f$  ist also auf ganz  $\mathbb{R}^2$  partiell differenzierbar.

Aber  $f$  ist in  $(0, 0)$  *nicht* stetig: Denn für  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ , ist  $f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$ , während  $f(0, 0) = 0$ .

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar in  $U$ . Wenn alle partiellen Ableitungen  $D_1f, \dots, D_nf : U \rightarrow \mathbb{R}$  wieder partiell differenzierbar sind, so kann man  $D_jD_if := D_j(D_if)$  bilden und sagt, dass  $f$  zweimal partiell differenzierbar ist. Induktiv definiert man, was es für  $k \in \mathbb{N}$  bedeutet, dass  $f$  *k-mal partiell differenzierbar* ist. Schreibe auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := D_j D_i f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := D_i^2 f := D_i D_i f \text{ usw.}$$

Wenn  $f$   $k$ -mal partiell differenzierbar ist und wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$  stetig sind (dazu gehört insbesondere, dass  $f$  selbst als partielle Ableitung der Ordnung 0 stetig ist), so sagt man,  $f$  sei *von der Klasse  $C^k$* . Wenn  $f$  stetige partielle Ableitungen von jeder Ordnung hat, so heißt  $f$  *von der Klasse  $C^\infty$*  oder *glatt*. Schließlich heißt  $f$  *von der Klasse  $C^0$* , wenn es stetig ist.

**Satz 1. (Satz von H. A. Schwarz)** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^2$ . Sei  $a \in U$  und  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist

$$D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a).$$

Von nun an schreiben wir die Elemente von  $\mathbb{R}^n$  als Spaltenvektoren. Wir schreiben also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Ist  $X$  eine Menge und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung, so ist  $f$  von der Form

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_m)^T$$

mit  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Bez.** Ist  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar, so erhält man eine Abbildung

$$\nabla f = \text{grad} f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

durch  $\nabla f(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$ .

$\nabla f$  heißt der *Gradient* von  $f$ .

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $f$  heißt *partiell differenzierbar* (bzw. *von der Klasse  $C^k$* ), wenn alle  $f_i$  partiell differenzierbar (bzw. von der Klasse  $C^k$ ) sind. Man schreibt dann für  $x \in U$ :

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$Df(x)$  heißt die *Funktionalmatrix* oder die *Jacobimatrix* oder die *Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $x$ .

$Df(x)$  ist eine  $m \times n$ -Matrix; ihre  $i$ -te Zeile ist der transponierte Gradient von  $f_i$  an der Stelle  $x$ .

Ist  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , so ist  $Df(x) \cdot \xi \in \mathbb{R}^m$ .

## 5. Differenzierbare und stetig differenzierbare Abbildungen

**Satz 1.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f = (f_1, \dots, f_m)^T : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine partiell differenzierbare Abbildung, so dass alle Funktionen  $D_j f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind. Sei  $x \in U$  fest.

Ist  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $x + \xi \in U$ , so definiere  $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$  durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi).$$

Dann ist

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0.$$

(Dies soll heißen: Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\xi\| < \delta$  und  $\xi \neq 0$  gilt:

$$x + \xi \in U \text{ und } \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} < \varepsilon.)$$

**Def.** Ist  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung, so heißt  $f$  differenzierbar in  $x$ , wenn  $f$  in  $x$  partiell differenzierbar ist und wenn Folgendes gilt:

Definiert man  $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $x + \xi \in U$  durch

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi),$$

so ist  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$ .

**Satz 2.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung und  $x \in U$ . Wenn  $f$  in  $x$  differenzierbar ist, so ist  $f$  in  $x$  stetig.

Für den Beweis braucht man:

**Lemma** Eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig.

Es gibt ein  $\alpha \geq 0$  mit  $\|A\xi\| \leq \alpha \|\xi\|$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

**Folgerung aus Satz 1 und Satz 2:** Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen  $D_j f_i$  alle stetig, so ist  $f$  stetig, d.h.  $f$  ist von der Klasse  $C^1$ , m.a.W.  $f$  ist stetig differenzierbar.

Allgemeiner: Ist  $f$   $k$ -mal partiell differenzierbar und sind alle  $k$ -ten partiellen Ableitungen stetig, so ist  $f$  von der Klasse  $C^k$ .

**Beispiel:** Sei  $A$  eine reelle  $m \times n$ -Matrix. Definiere  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch  $f(x) := A \cdot x$ . Dann ist  $f$  von der Klasse  $C^\infty$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $Df(x) = A$ , denn ist  $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ , so

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \text{ für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

also  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$ . Alle höheren partiellen Ableitungen von  $f$  sind 0.

Für den Beweis der Kettenregel brauchen wir:

**Satz 3.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Es gebe eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  mit

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} (f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$



Dann ist  $f$  differenzierbar in  $x$  und  $Df(x) = A$ .

Dies zeigt, wie man den Begriff der Differenzierbarkeit weiter verallgemeinern kann: Sind  $V, W$  endlich dimensionale normierte Räume, ist  $U$  offen in  $V$ , ist  $f : U \rightarrow W$  eine Abbildung und ist  $x \in U$ , so heißt  $f$  differenzierbar an der Stelle  $x$ , wenn es eine lineare Abbildung  $A : V \rightarrow W$  gibt, so dass

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\|\xi\|} (f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi) = 0.$$

Dieses  $A$  ist dann eindeutig bestimmt; man bezeichnet es mit  $Df(x)$  und nennt es die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$ .

**Satz 4. (Kettenregel)** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $V$  offen in  $\mathbb{R}^m$  und seien  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  differenzierbar mit  $g(U) \subseteq V$ . Dann ist die Abbildung  $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  differenzierbar und

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \quad \forall x \in U.$$

(Dabei steht auf der rechten Seite das Produkt der Matrizen  $Df(g(x))$  und  $Dg(x)$ .) Sind  $f$  und  $g$  von der Klasse  $C^k$  mit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , so ist auch  $f \circ g$  von der Klasse  $C^k$ .

**Spezialfall:** Ist  $p = 1$ , also  $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

Dabei sind die Variablen in  $\mathbb{R}^m$  mit  $y_1, \dots, y_m$  bezeichnet.

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $U_v := \{t \in \mathbb{R} \mid x + tv \in U\}$  eine offene Umgebung von 0 in  $\mathbb{R}$ . Definiere  $F_v : U_v \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F_v(t) := f(x + tv).$$

Wenn  $F_v$  in 0 differenzierbar ist, so heißt

$$D_v f(x) := F_v'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x))$$

die *Richtungsableitung* von  $f$  im Punkt  $x$  in Richtung  $v$ .

**Bem.**  $D_{e_i} f = D_i f$ .

**Bez.** Für  $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$  sei

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

also  $\|v\|_2 = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

**Satz 5.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Sei  $x \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann existiert die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $x$  in Richtung  $v$  und

$$D_v f(x) = \langle v, \nabla f(x) \rangle.$$

**Anschauliche Interpretation des Gradienten:** Der Vektor  $\text{grad} f(x)$  gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$  an.

## 6. Mittelwertsatz und Taylor-Formel

Der Mittelwertsatz aus Analysis I lautet: Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $]a, b[$ . Dann gibt es ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$(*) \quad f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

In dieser Form lässt sich der Mittelwertsatz nicht auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern. Betrachte z.B.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x) = (\cos x, \sin x).$$

Dann ist  $f(0) = f(2\pi)$ , aber  $Df(x) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

Aus (\*) folgt: Wenn es ein  $M \geq 0$  gibt mit  $|f'(\xi)| \leq M$  für alle  $\xi \in ]a, b[$ , so ist  $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|$ . Dies lässt sich verallgemeinern.

**Def.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und sei  $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Dann heißt  $f$  (Riemann-) integrierbar, wenn alle  $f_i$  integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int_a^b f(x) dx := \left( \int_a^b f_1(x) dx, \dots, \int_a^b f_m(x) dx \right) \in \mathbb{R}^m.$$

**Bem.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  Riemann-integrierbar, so ist  $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar und

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

(Dabei ist  $\|\cdot\|$  eine der Normen  $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ .)

Dies benutzen wir beim Beweis des folgenden Satzes.

**Satz 1. (Mittelwertsatz)** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  von der Klasse  $C^1$ . Seien  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ , so dass die Strecke

$$\{x + t\xi \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

zwischen  $x$  und  $x + \xi$  ganz in  $U$  liegt. Dann gibt es ein  $M \geq 0$ , so dass

$$\|Df(x + t\xi) \cdot v\| \leq M\|v\| \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

und für jedes solches  $M$  ist

$$\|f(x + \xi) - f(x)\| \leq M \cdot \|\xi\|.$$

**Satz 2.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und habe die folgende Eigenschaft:

Je zwei Punkte von  $U$  können durch einen Streckenzug verbunden werden, der ganz in  $U$  verläuft. Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  partiell differenzierbar mit  $Df(x) = 0$  für alle  $x \in U$ . Dann ist  $f$  konstant.

**Bez.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung.

a) Ist  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ , so sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!.$$

Ein solches  $\alpha$  heißt  $n$ -Multiindex.

b) Ist  $\alpha$  wie in a) und  $f$  von der Klasse  $C^{|\alpha|}$ , so sei

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dabei ist  $D_i^0 f := f$  zu setzen.

c) Ist  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , so sei  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$ .

**Satz 3. (Taylor -Formel)** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^{k+1}$ .

a) Seien  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ , so dass die Strecke zwischen  $x$  und  $x + \xi$  in  $U$  liegt. Dann ist

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \int_0^1 (1-t)^k \frac{D^\alpha f(x+t\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha dt.$$

b) Ist  $x \in U$  und definiert man

$$R(\xi) := f(x + \xi) - \sum_{|\alpha| \leq k+1} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $x + \xi \in U$ , so ist

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{R(\xi)}{\|\xi\|^{k+1}} = 0.$$

## 7. Extremwerte und kritische Stellen

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $x_0 \in X$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung.  $f$  besitzt in  $x_0$  ein *lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt mit

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U.$$

$f$  besitzt in  $x_0$  ein *striktes lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt mit

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Entsprechend definiert man, wann  $f$  in  $x_0$  ein (*striktes*) *lokales Minimum* bzw. *Extremum* besitzt.

**Satz 1.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Wenn  $f$  in  $x_0 \in U$  ein lokales Extremum besitzt, so ist

$$\text{grad} f(x_0) = 0.$$

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Ist  $x_0 \in U$  mit  $\text{grad} f(x_0) = 0$ , so heißt  $x_0$  eine *kritische Stelle* von  $f$ .

**Def.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^2$ . Ist  $x \in U$ , so sei  $Hf(x)$  die reelle  $n \times n$ -Matrix  $(a_{ij})$  mit

$$a_{ij} := D_i D_j f(x).$$

$Hf(x)$  heißt die *Hessesche Matrix* von  $f$  an der Stelle  $x$ .

**Bem.** Nach dem Satz von Schwarz ist  $a_{ij} = a_{ji}$ , d.h.  $Hf(x)$  eine symmetrische Matrix.

**Def.** Sei  $A$  eine symmetrische reelle  $n \times n$ -Matrix.

$A$  heißt *positiv definit*, wenn  $\langle A(x), x \rangle > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

$A$  heißt *negativ definit*, wenn  $\langle A(x), x \rangle < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

$A$  heißt *indefinit*, wenn es ein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle A(x), x \rangle > 0$  und ein  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle A(y), y \rangle < 0$  gibt.

**Satz 2.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^2$ . Sei  $x_0$  eine kritische Stelle von  $f$ .

a) Ist  $Hf(x_0)$  positiv definit, so besitzt  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Minimum.

b) Ist  $Hf(x_0)$  negativ definit, so besitzt  $f$  in  $x_0$  ein striktes lokales Maximum.

c) Ist  $Hf(x_0)$  indefinit, so besitzt  $f$  in  $x_0$  kein lokales Extremum.

**Erinnerungen an die Lineare Algebra:**

Sei  $A$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix. Eine komplexe Zahl  $\lambda$  heißt Eigenwert von  $A$ , wenn es ein  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  gibt mit  $Ax = \lambda x$ . Mit

$$\chi_A(t) = \det(tI - A)$$

bezeichnen wir das charakteristische Polynom von  $A$ . Die Eigenwerte von  $A$  sind genau die Nullstellen von  $\chi_A$ .

Ist  $A$  eine symmetrische Matrix, so sind alle Eigenwerte von  $A$  reell, und es gilt:

- $A$  ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind.
- $A$  ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von  $A$  negativ sind.
- $A$  ist indefinit genau dann, wenn  $A$  einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt.

**Kriterium von Hurwitz:** Sei  $A = (a_{ij})$  symmetrisch,

$$\Delta_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

$A$  positiv definit  $\iff \Delta_k > 0$  für  $k = 1, \dots, n$ .

$A$  negativ definit  $\iff (-1)^k \Delta_k > 0$  für  $k = 1, \dots, n$ .

**Beispiel 1.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 - y^2$  (Sattelfläche)

$\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ . Einzige kritische Stelle:  $(0, 0)$ .

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  ist indefinit. Also besitzt  $f$  überhaupt keine lokalen Extrema.

**Beispiel 2.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^3 - y^3$ .

$\text{grad}f(x, y) = (3x^2, -3y^2)$ . Einzige kritische Stelle:  $(0, 0)$ .

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$ , insbesondere  $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dies ist weder positiv definit noch negativ definit noch indefinit. In jeder Umgebung von  $(0, 0)$  nimmt  $f$  positive und negative Werte an, besitzt also auch in  $(0, 0)$  kein lokales Extremum.

**Beispiel 3.**  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

Kritische Stellen:  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$ .

Man kann Satz 2 anwenden: Kein lokales Extremum in  $(0, 0)$ , striktes lokales Minimum in  $(1, 1)$ .

# Teil II: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

## 8. Beispiele und Problemstellungen

Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^2$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Wenn für alle  $x \in I$  gilt:

- (a)  $(x, \varphi(x)) \in U$ ,
- (b)  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ ,

so heißt  $\varphi$  eine *Lösung der Differenzialgleichung*

- (c)  $y' = f(x, y)$ ;

man nennt (c) eine *explizite gewöhnliche Differenzialgleichung 1.Ordnung*.

Ist  $(x_0, y_0) \in U$  und ist  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (c) mit  $x_0 \in I$  und  $\varphi(x_0) = y_0$ , so sagt man, dass  $\varphi$  die *Anfangsbedingung*

- (d)  $y(x_0) = y_0$

erfüllt.

**Beispiel 1:** Sei  $U = J \times \mathbb{R}$ , wobei  $J$  ein offenes Intervall ist, und sei  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Definiere  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) := g(x)$ , d.h. betrachte die DGL.

$$y' = g(x).$$

Ihre Lösungen sind die Stammfunktionen von  $g$ .

**Beispiel 2:** Sei  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $f(x, y) := y$ , d.h. betrachte die DGL.

$$y' = y.$$

Für  $c \in \mathbb{R}$  definiere  $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_c(x) := c e^x.$$

Dann ist  $\varphi_c$  eine Lösung, und jede andere Lösung entsteht durch Einschränken eines  $\varphi_c$  auf ein Teilintervall. Für jedes  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  gibt es genau eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$ .

**Beispiel 3:** Sei  $U = \mathbb{R}^2$  und  $f(x, y) = y^2$ , d.h. betrachte die DGL.

$$y' = y^2.$$

Sei  $\varphi_0$  die Nullfunktion. Für  $c \in \mathbb{R}$  definieren wir  $\varphi_c^+ : ]c, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\varphi_c^- : ]-\infty, c[ \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_c^\pm(x) := \frac{1}{c - x}.$$

Dann sind die Funktionen  $\varphi_0$ ,  $\varphi_c^+$  und  $\varphi_c^-$  Lösungen von  $y' = y^2$ , und jede Lösung dieser DGL. entsteht daraus durch Einschränkung auf ein Teilintervall. Für jedes  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  gibt es genau eine Lösung, die die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllt und die einen maximalen Definitionsbereich hat.

**Beispiel 4:** Sei  $U = \mathbb{R}^2$  und  $f(x, y) = 3y^{2/3}$ , d.h. betrachte die DGL.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Für  $c \in \mathbb{R}$  sei  $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\varphi_c(x) := (x - c)^3.$$

Dann ist  $\varphi_c$  eine Lösung mit  $\varphi_c(c) = 0$  und  $\varphi'_c(c) = 0$ . Für  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  mit  $a < b$  definiere  $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_{a,b}(x) := \begin{cases} \varphi_a(x) & \text{für } x \leq a \\ 0 & \text{für } a < x < b \\ \varphi_b(x) & \text{für } b \leq x. \end{cases}$$

Dann ist  $\varphi_{a,b}$  differenzierbar und Lösung von  $y' = 3y^{2/3}$ . Für jede Anfangsbedingung gibt es also unendlich viele verschiedene Lösungen!

**Verallgemeinerung:** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig. Sei  $I$  ein offenes Intervall und  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbare Funktionen. Wenn für alle  $x \in I$  gilt:

- (a)  $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in U$ ,
- (b)  $\varphi'_i(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  für  $i = 1, \dots, n$ ,

so heißen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Schreibt man  $f := (f_1, \dots, f_n)$  und  $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , so schreiben sich die Bedingungen (a) und (b) in der Form

- (a)  $(x, \varphi(x)) \in U$ ,
- (b)  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ .

Statt des Systems (c) schreibt man einfach wieder

$$y' = f(x, y)$$

und nennt weiterhin  $\varphi$  eine Lösung dieser expliziten gewöhnlichen DGL. erster Ordnung.

**Existenzsatz von Peano.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(x_0, y_0) \in U$ . Dann existiert eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der DGL.  $y' = f(x, y)$  mit  $x_0 \in I$  und  $\varphi(x_0) = y_0$ .

**Def.** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$ .

a)  $f$  heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein  $L \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

b)  $f$  heißt *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  gibt, so dass  $f|_U$  Lipschitz-stetig ist.

**Bem.1:** Lipschitz-stetig  $\implies$  lokal Lipschitz-stetig  $\implies$  stetig.

**Bem.2:** Sei  $X$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  von der Klasse  $C^1$ . Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig.

**Def.** Seien  $X, Y, Z$  metrische Räume,  $U \subseteq X \times Y$  und  $f : U \rightarrow Z$ .

a)  $f$  heißt *Lipschitz-stetig im 2. Argument*, wenn es ein  $L \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$d(f(x, y), f(x, \tilde{y})) \leq L \cdot d(y, \tilde{y}) \quad \forall (x, y), (x, \tilde{y}) \in U.$$

b)  $f$  heißt *lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument*, wenn es für jedes  $(x_0, y_0) \in U$  eine Umgebung  $V$  von  $(x_0, y_0)$  in  $U$  gibt, so dass  $f|_V$  Lipschitz-stetig im 2. Argument ist.

**Bem.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Wir bezeichnen die partiellen Ableitungen von  $f$  mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

(wenn sie existieren). Wenn  $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$  existieren und stetige Abbildungen  $U \rightarrow \mathbb{R}^k$  sind, so ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument.

**Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(x_0, y_0) \in U$ . Ferner sei  $f$  lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument. Dann existieren ein offenes Intervall  $I$  mit  $x_0 \in I$  und eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der DGL  $y' = f(x, y)$  mit folgenden Eigenschaften:

a)  $\varphi(x_0) = y_0$ .

b) Ist  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von  $y' = f(x, y)$  mit  $\psi(x_0) = y_0$ , so ist  $J \subseteq I$  und  $\psi = \varphi|_J$ .

**Globaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig. Für jedes kompakte Teilintervall  $K$  von  $I$  sei  $f|_K$  Lipschitz-stetig im 2. Argument. Sei  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ .

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der DGL  $y' = f(x, y)$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ .

**Beispiel 5: (Differenzialgleichung mit getrennten Variablen)**

Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  offene Intervalle,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig mit  $h(y) \neq 0 \forall y \in J$ . Definiere  $f(x, y) : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) := g(x)h(y)$ , d.h. betrachte die DGL

$$y' = g(x)h(y).$$

*Heuristisches Lösungsverfahren:*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + c$$

Die linke Seite ist eine Funktion von  $y$ , die rechte eine Funktion von  $x$ . Löse diese Gleichung nach  $y$  auf.

*Exakt:* Sei  $(x_0, y_0) \in I \times J$ . Definiere  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H : J \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad H(y) := \int_{y_0}^y \frac{dt}{h(t)}.$$

Dann existiert ein offenes Intervall  $I' \subseteq I$  mit  $x_0 \in I'$  und eine eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$  der DGL  $y' = g(x)h(y)$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ , und  $H(\varphi(x)) = G(x)$  für  $x \in I'$ .

**Beispiel 6: (Homogene lineare DGL.)**

Sei  $I$  offenes Intervall,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Definiere  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) := a(x)y$ . Die DGL  $y' = f(x, y)$  lautet also

$$y' = a(x)y.$$

Sei  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ . Dann existiert genau eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  von  $y' = a(x)y$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ , und

$$\varphi(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right).$$

**Beispiel 7: (Lineare DGL.)** Sei  $I$  offenes Intervall,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Definiere  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x, y) := a(x)y + b(x)$ . Betrachte also die DGL.

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Sei  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ . Dann existiert genau eine Lösung  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  von  $y' = a(x)y + b(x)$  mit  $\psi(x_0) = y_0$ :

Sei  $\varphi(x) := \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$ . Dann ist  $\varphi$  Lösung der „zugehörigen homogenen linearen DGL.“

$y' = a(x)y$ , also  $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x)$ , und  $\varphi(x) \neq 0 \forall x \in I$ .

Ist  $\psi$  irgendeine Lösung von  $y' = a(x)y + b(x)$ , so existiert eine  $C^1$ -Funktion  $u$  mit  $\psi(x) = \varphi(x)u(x)$ .

$$\Rightarrow \psi' = \varphi' u + \varphi u' = a\varphi u + \varphi u' = a\psi + \varphi u'.$$

Es ist also  $\psi' = a\psi + b$  genau dann, wenn  $\varphi u' = b$ , also  $u' = \frac{b}{\varphi}$

$$\Rightarrow u(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt + \text{const.}$$

Aus  $\psi(x_0) = y_0$  folgt:  $y_0 = \varphi(x_0)u(x_0) = u(x_0) \Rightarrow \text{const} = y_0$

$$\Rightarrow \psi(x) = \varphi(x) \cdot \left(y_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\varphi(t)} dt\right).$$

(Methode der *Variation der Konstanten*.)

**Differenzialgleichungen höherer Ordnung:** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $I$  ein offenes Intervall und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar. Wenn für alle  $x \in I$  gilt:

$$(a) \quad (x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in U,$$

$$(b) \quad \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)),$$

so heißt  $\varphi$  eine Lösung der DGL.

$$(c) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Man nennt (c) eine explizite gewöhnliche DGL.  $n$ -ter Ordnung.

**Reduktion auf ein System von DGLn. 1. Ordnung:**

Definiere  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$F(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) := (y_1, \dots, y_{n-1}, f(x, y_0, \dots, y_{n-1})).$$

Mit  $Y := (y_0, \dots, y_{n-1})$  lautet das System  $Y' := F(x, Y)$  ausgeschrieben:

$$y_0' = y_1$$

$$y_1' = y_2$$

$\vdots$

$$y_{n-2}' = y_{n-1}$$

$$y_{n-1}' = f(x, y_0, \dots, y_{n-1})$$

Daher gilt:

1) Ist  $\varphi$  eine Lösung von  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , so ist  $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$  eine Lösung von  $Y' = F(x, Y)$ .

2) Ist  $\Phi = (\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$  eine Lösung von  $Y' = F(x, Y)$ , so ist  $\varphi$  eine Lösung von  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ .

**Folgerung aus dem Lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz:**

Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument.

Sei  $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in U$ . Dann existiert eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  der DGL.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$



mit

- (a)  $\varphi(x_0) = y_0,$   
 $\varphi'(x_0) = y_1,$   
 $\vdots$   
 $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$
- (b) Ist  $\psi : J \mapsto \mathbb{R}$  Lösung mit  $\psi^{(k)}(x_0) = y_k$  für  $k = 0, \dots, n-1,$   
so ist  $J \subseteq I$  und  $\psi = \varphi|_J.$

**Beispiel 8:**  $y'' = -y.$

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  definiere  $\varphi_{a,b}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_{a,b}(x) := a \cos x + b \sin x.$$

Dann ist  $\varphi_{a,b}$  eine Lösung und alle Lösungen sind von dieser Form.

## 9. Lineare Differenzialgleichungen

**Vorbemerkung 1:** Ein *komplexer normierter Raum* besteht aus einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  und einer Abbildung  $V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$  mit

- (1)  $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$
- (2)  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- (3)  $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$  für  $v \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$
- (4)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V.$

Auf  $\mathbb{C}^n$  hat man die Normen  $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2,$  die für  $v = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  definiert sind durch

$$\begin{aligned}\|v\|_\infty &:= \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}, \\ \|v\|_1 &:= |z_1| + \dots + |z_n|, \\ \|v\|_2 &:= (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Ist  $V$  ein komplexer normierter Raum, so ist der  $V$  zugrundeliegende  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V_{\mathbb{R}}$  ein reeller normierter Raum. Insbesondere gilt:

$V$  wird durch  $d(x, y) := \|x - y\|$  zu einem metrischen Raum;  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig; zwei Normen  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  auf dem endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  sind äquivalent in dem Sinn, dass es positive Zahlen  $a, A$  gibt mit

$$a \|v\| \leq \|v\|' \leq A \|v\| \quad \forall v \in V.$$

**Vorbemerkung 2:** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Der  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $M(m, n; \mathbb{K})$  der  $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus  $\mathbb{K}$  wird betrachtet als die Menge der  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ .

Wir wählen Normen auf  $\mathbb{K}^n$  und  $\mathbb{K}^m$ , die beide mit  $\|\cdot\|$  bezeichnet werden. Ist  $A \in M(m, n; \mathbb{K}),$  so sei

$$\|A\| := \max\{\|Ax\| \mid x \in \mathbb{K}^n \text{ und } \|x\| = 1\}.$$

(Beachte:  $S := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\| = 1\}$  ist beschränkt und abgeschlossen in  $\mathbb{K}^n$ . Daher nimmt die stetige Funktion  $x \mapsto \|Ax\|$  auf  $S$  ihr Maximum an.) Es gilt:

- (1) Damit hat man eine Norm auf  $M(m, n; \mathbb{K}).$

(2) Für alle  $x \in \mathbb{K}^n$  und alle  $A \in M(m, n; \mathbb{K})$  ist  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ .

Ist  $m = n$ , so wählt man die beiden Ausgangsnormen gleich. Es ist dann:

(3)  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  für alle  $A, B \in M(n, n; \mathbb{K})$ .

**Def.** Sei  $I$  ein offenes Intervall,  $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{R})$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Definiere  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x).$$

Dann heißt  $y' = f(x, y)$  ein *System von  $n$  linearen DGLn. 1. Ordnung* oder kurz eine *lineare DGL. 1. Ordnung*. Ist dabei  $b(x) = 0 \quad \forall x \in I$ , so heißt das System *homogen*.

**Satz 1.** Sei  $I$  ein offenes Intervall,  $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{R})$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien stetig. Sei  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ .

Dann besitzt das System  $y' = A(x)y + b(x)$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ .

(In Zukunft verstehen wir unter einer Lösung einer solchen linearen DGL. immer eine auf ganz  $I$  definierte Lösung.)

**Bem.** Wir identifizieren  $\mathbb{C}^n$  mit  $\mathbb{R}^{2n}$  vermöge

$$(z_1, \dots, z_n) \longleftrightarrow (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n).$$

Eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , also ein  $A \in M(n, n; \mathbb{C})$ , wird dann mit einer  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildung  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , also einer Matrix aus  $M(2n, 2n; \mathbb{R})$ , identifiziert: Ist  $A = C + iD$  mit  $C, D \in M(n, n; \mathbb{R})$ , so wird  $A$  identifiziert mit

$$\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix} \in M(2n, 2n; \mathbb{R}).$$

**Def.** Sei  $I$  ein offenes Intervall (in  $\mathbb{R}$ ),  $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{C})$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  seien stetig. Definiere  $f : I \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  durch  $f(x, y) := A(x) \cdot y + b(x)$ . Dann ist  $y' = f(x, y)$  mit obigen Identifikationen ein System von  $2n$  linearen DGLn. 1. Ordnung. Wir nennen es ein *System von  $n$  linearen komplexen DGLn. 1. Ordnung* oder kurz *lineare DGL. 1. Ordnung*.

**Satz 2.** Sei  $I$  ein offenes Intervall,  $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{K})$  sei stetig,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

a) Die Lösungen der DGL.

$$y' = A(x)y$$

bilden einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $L$  der Dimension  $n$ .

b) Wählt man ein festes  $x_0 \in I$ , so erhält man einen Isomorphismus von  $L$  auf  $\mathbb{K}^n$  durch  $\varphi \mapsto \varphi(x_0)$ .

**Bem.** Bei einem homogenen System von  $n$  linearen DGLn. 1. Ordnung handelt es sich also darum,  $n$  linear unabhängige Lösungen  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  zu finden. Alle anderen Lösungen ergeben sich dann als Linearkombinationen. Für  $n > 1$  gibt es kein allgemeines Verfahren, um Lösungen zu finden!

**Beispiel:**  $y'_1 = y_2$

$$y'_2 = -y_1$$

Zwei Lösungen  $\varphi^1, \varphi^2$  sind gegeben durch

$$\varphi^1(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad \varphi^2(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

Dann bilden  $\varphi^1$  und  $\varphi^2$  eine Basis des Lösungsraums.

**Satz 3.** Sei  $I$  ein offenes Intervall,  $A : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{K})$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  seien stetig. Sei  $L$  der Lösungsraum der homogenen DGL.

$$y' = A(x) \cdot y$$

und  $M$  die Menge aller Lösungen von

$$y' = A(x) \cdot y + b(x).$$

Ist  $\psi_0 \in M$ , so ist  $M = \psi_0 + L := \{\psi_0 + \varphi \mid \varphi \in L\}$ .

**Bem.** Hat man also eine Basis  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  des Lösungsraums der homogenen DGL.  $y' = A(x)y$ , so muss man nur noch *eine* Lösung  $\psi$  der inhomogenen DGL.  $y' = A(x)y + b(x)$  finden. Dies geschieht mit der Methode der *Variation der Konstanten*:

Man definiert  $\Phi : I \rightarrow M(n, n; \mathbb{K})$  durch  $\Phi := (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$  und sucht  $\psi$  in der Form  $\psi(x) = \Phi(x)u(x)$  mit  $u : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Man erhält

$$u(x) = \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} b(t) dt + \text{const.}$$

**Beispiel:**  $y'_1 = y_2$   
 $y'_2 = -y_1 + x$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} = \Phi(x)^{-1}$$

$$u(x) = \begin{pmatrix} \cos x + x \sin x - 1 \\ -\sin x + x \cos x \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) = \begin{pmatrix} x - \sin x \\ 1 - \cos x \end{pmatrix}$$

**Def.** Sei  $I$  ein offenes Intervall und seien

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann heißt

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x)$$

eine *lineare DGL. n-ter Ordnung*. Ist  $b = 0$ , so heißt sie *homogen*.

**Satz 4.** a) Sei  $L$  die Menge aller Lösungen der homogenen DGL.

$$y^{(n)} = a_0(x)y + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}.$$

Dann ist  $L$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

b) Sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L$ , so bilden  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  genau dann eine Basis von  $L$ , wenn für ein und damit für alle  $x \in I$  gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0.$$

c) Ist  $M$  die Menge aller Lösungen der inhomogenen DGL.

$$y^{(n)} = a_0(x)y + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x)$$

und ist  $\psi_0 \in M$ , so ist  $M = \psi_0 + L$ .

**Bem.** Auch für die lineare DGL. 2. Ordnung gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren.

## 10. Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Def.** Ist  $A \in M(n; \mathbb{K}) := M(n, n; \mathbb{K})$  und  $b \in \mathbb{K}^n$ , so heißt

$$y' = Ay$$

eine homogene lineare DGL. mit konstanten Koeffizienten. Ihre Lösungen sind auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum.

a) Eine Folge  $(x_n)$  in  $X$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq N$ .

b)  $X$  heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in  $X$  konvergiert.

c) Ein normierter Raum heißt *Banach-Raum*, wenn er vollständig ist.

**Bem.** Jeder endlich-dimensionale normierte Raum ist ein Banach-Raum.

**Def.** Sei  $V$  ein normierter Raum und  $(a_n)$  eine Folge in  $V$ .

a) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt *konvergent*, wenn die Folge  $(a_1 + \dots + a_k)_k$  in  $V$  konvergiert.

b) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$  reeller Zahlen konvergiert.

**Bem.** In einem Banach-Raum ist jede absolut konvergente Reihe konvergent, und man kann mit absolut konvergenten Reihen wie in  $\mathbb{R}$  umgehen.

**Def.** Sei  $A \in M(n; \mathbb{K})$ . Im Banach-Raum  $M(n; \mathbb{K})$  konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$  absolut. Dabei setzt man  $A^0 = I_n$  für alle  $A \in M(n; \mathbb{K})$ . Sei

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in M(n; \mathbb{K}).$$

**Satz 1.** Ist  $A \in M(n; \mathbb{K})$  und  $y_0 \in \mathbb{K}^n$ , so ist die einzige Lösung  $\varphi$  von  $y' = Ay$  mit  $\varphi(0) = y_0$  gegeben durch

$$\varphi(x) = e^{xA} y_0.$$

**Bem.** Ist  $v_0 \in \mathbb{K}^n$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , so ist  $x \mapsto e^{\lambda x} v_0$  eine Lösung von  $y' = Ay$ .

Wenn  $A$  diagonalisierbar ist, so gibt es eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathbb{K}^n$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  mit

$$A v_j = \lambda_j v_j.$$

Dann bilden die  $n$  Funktionen

$$x \mapsto e^{\lambda_j x} v_j$$

eine Basis des Lösungsraums der DGL.  $y' = Ay$ .

**Beispiel 1:**  $y'_1 = 5y_1 + 3y_2$

$$y'_2 = -6y_1 - 4y_2$$

Die Lösungen sind von der Form

$$y_1(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-x}$$

$$y_2(x) = -\alpha e^{2x} - 2\beta e^{-x}$$

mit Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Satz 2.** Sei  $A \in M(n; \mathbb{C})$  und  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine Lösung der DGL  $y' = Ay$ . Dann ist jedes  $\varphi_j$  eine komplexe Linearkombination der Funktionen

$$x \mapsto x^k e^{\lambda x},$$

wobei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  und  $k$  kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda$  (sogar kleiner als die Größe des größten Jordan-Kästchens zum Eigenwert  $\lambda$ ) ist.

**Satz 3.** Sei  $A \in M(n; \mathbb{R})$  und  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von  $y' = Ay$ . Dann ist jedes  $\varphi_j$  reelle Linearkombination der Funktionen

$$x \mapsto x^k e^{ax} \cos bx \quad \text{und} \quad x \mapsto x^k e^{ax} \sin bx,$$

wobei  $a + bi$  die komplexen Eigenwerte von  $A$  mit  $b \geq 0$  durchläuft und  $k$  eine nicht-negative ganze Zahl ist, die kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts  $a + bi$  von  $A$  ist.

**Beispiel 2:**  $y_1' = y_1 + y_2$

$$y_2' = y_2$$

Die Lösungen sind von der Form

$$y_1(x) = \alpha e^x + \beta x e^x$$

$$y_2(x) = \beta e^x.$$

mit Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Satz 4.** Seien  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ . Wir betrachten die DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Es sei

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \prod_{j=1}^m (x - \lambda_j)^{k_j}$$

mit paarweise verschiedenen  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ .

Dann bilden die Funktionen

$$x^k e^{\lambda_j x} \quad \text{mit } 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k < k_j$$

eine Basis des Lösungsraums.

**Satz 5.** Seien  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten die DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen des Polynoms

$$g(x) := x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Seien  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$  die paarweise verschiedenen nicht-reellen Nullstellen von  $g$  mit  $\text{Im } \lambda_j > 0$ . Für  $j = 1, \dots, s$  sei  $k_j$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda_j$ . Für  $j = r+1, \dots, s$  sei  $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$  mit  $\mu_j, \nu_j \in \mathbb{R}$ . Dann bilden die Funktionen

$$\left. \begin{array}{l} x^p e^{\lambda_j x} \\ x^p e^{\mu_j x} \cos \nu_j x \\ x^p e^{\mu_j x} \sin \nu_j x \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1 \leq j \leq r, \quad 0 \leq p < k_j) \\ (r < j \leq s, \quad 0 \leq p < k_j) \end{array}$$

eine Basis des Lösungsraums.

**Beispiel:** Die DGL der gedämpften Schwingung:

$$y'' + 2\mu y' + \omega_0^2 y = 0$$

mit  $\mu \geq 0, \omega_0 > 0$ . Man nennt  $2\mu$  den Dämpfungsfaktor und  $\omega_0$  die Frequenz der ungedämpften Schwingung.

## 11. Der Fixpunktsatz von Banach

**Def.** Sei  $X$  eine Menge und  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung. Dann heißt ein Element  $x \in X$  ein *Fixpunkt* von  $f$ , wenn  $f(x) = x$ .

**Def.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow X$  heißt *kontrahierend*, wenn es ein  $C \in \mathbb{R}$  mit  $C < 1$  gibt, so dass gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

**Bem.** Eine kontrahierende Abbildung ist (Lipschitz-) stetig.

**Satz 1.** Sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt  $f$  genau einen Fixpunkt.

**Beweisidee:** Man wählt einen beliebigen Startpunkt  $x_0 \in X$ . Dann ist  $\lim_n f^n(x_0)$  der Fixpunkt.

**Satz 2.** Sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum,  $x_0 \in X$ ,  $R > 0$  und  $B := \{x \in X \mid d(x_0, x) < R\}$ . Sei  $G : B \rightarrow X$  eine Abbildung und es gebe ein  $C < 1$ , so dass

$$(1) \quad d(G(x), G(y)) \leq C d(x, y) \quad \forall x, y \in B,$$

$$(2) \quad d(G(x_0), x_0) < R(1 - C).$$

Dann gibt es genau ein  $x \in B$  mit  $G(x) = x$ .

## 12. Der lokale Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Wir formulieren die DGL.  $y' = f(x, y)$  mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  um in ein Fixpunktproblem:

**Lemma 1.** Sei  $I$  ein offenes Intervall,  $H$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : I \times H \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig,  $(x_0, y_0) \in I \times H$ . Sei  $J$  ein offenes Teilintervall von  $I$  mit  $x_0 \in J$ .

Für eine stetige Abbildung  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(J) \subseteq H$  definieren wir eine stetige Abbildung  $G(\varphi) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$(G(\varphi))(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

Für ein solches  $\varphi$  sind äquivalent:

- 1)  $\varphi$  ist Lösung von  $y' = f(x, y)$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ .
- 2)  $G(\varphi) = \varphi$ .

Um den Fixpunktsatz von Banach anwenden zu können, brauchen wir einen vollständigen metrischen Raum:

**Satz 1.** Sei  $I$  ein kompaktes Intervall und  $C(I)$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller stetigen Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $f \in C(I)$  sei

$$\|f\| := \max\{|f(x)| \mid x \in I\}.$$

Damit wird  $C(I)$  zu einem Banach-Raum.

**Bem.** a) Eine Folge  $(f_n)$  in  $C(I)$  konvergiert genau dann, wenn die Funktionenfolge  $(f_n)$  gleichmäßig konvergiert.

b) Allgemeiner sei  $C(I; \mathbb{R}^n)$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen Abbildungen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit der Norm

$$\|f\| := \max\{\|f(x)\|_\infty \mid x \in I\}.$$

Dann ist auch  $C(I; \mathbb{R}^n)$  ein Banach-Raum.

Man wendet nun den Banachschen Fixpunktsatz in der Fassung von §11, Satz 2 an mit  $X = C(I; \mathbb{R}^n)$ , wobei man für  $x_0$  die konstante Funktion mit Wert  $y_0$  wählt; der Radius  $R$  muß geeignet gewählt werden. Man erhält den Lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz (vgl. §8). Dieser Beweis liefert ein praktisch anwendbares Verfahren, um approximativ eine Lösung der DGL  $y' = f(x, y)$  mit Anfangsbedingung  $y(x_0) = x_0$  zu finden:

Man setzt  $\varphi_0(x) := y_0$  für alle  $x$  und definiert dann induktiv

$$\varphi_m(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{m-1}(t)) dt.$$

Auf einem kleinen Intervall, das  $x_0$  enthält, konvergiert die Funktionenfolge  $(\varphi_m)$  gleichmäßig gegen eine Lösung der DGL.

### 13. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Der Globale Existenz- und Eindeutigkeitsatz (siehe §8) wird mit dem Banachschen Fixpunktsatz bewiesen, wobei man auf dem Vektorraum  $C(K; \mathbb{R}^n)$  eine Norm geschickt wählen muss. Der Beweis zeigt, dass unter den Voraussetzungen des Globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatzes Folgendes gilt:

Sei  $\varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine beliebige stetige Funktion. Definiere  $\varphi_m : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  induktiv für  $m \geq 1$  durch

$$\varphi_m(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{m-1}(t)) dt.$$

Dann konvergiert die Folge  $(\varphi_m)$  gegen eine Lösung der DGL  $y' = f(x, y)$  mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$ , und zwar gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall.

### 14. Abzählbare Mengen und die Sätze von Arzelà-Ascoli und Peano

**Def.** Eine Menge  $X$  heißt *endlich*, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}_0$  und eine Bijektion von  $\{1, 2, \dots, n\}$  auf  $X$  gibt. Insbesondere ist  $\emptyset$  eine endliche Menge.

$X$  heißt *abzählbar*, wenn es eine Bijektion von  $\mathbb{N}$  auf  $X$  gibt.

$X$  heißt *höchstens abzählbar*, wenn  $X$  endlich oder abzählbar ist, d.h. wenn es eine Folge  $(a_n)$  in  $X$  gibt mit  $X = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ .

**Fakt 1.** Eine Teilmenge einer abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.

**Fakt 2.** Genau dann ist eine Menge  $X$  höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf  $X$  gibt.

**Fakt 3.** Sind  $X_1, X_2, \dots$  höchstens abzählbare Teilmengen einer Menge  $Z$ , so ist  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$  höchstens abzählbar.

**Beispiele:**  $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  und  $\mathbb{Q}$  sind abzählbar.

**Satz 1.**  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar, d.h. weder endlich noch abzählbar.

Der Beweis erfolgt mit dem sog. Cantorschen Diagonalverfahren; ein ähnliches Verfahren wird auch beim Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli benutzt.

### Ergänzungen zu gleichmäßiger Konvergenz und gleichmäßiger Stetigkeit

- Seien  $X$  eine Menge,  $Y$  ein metrischer Raum und  $f_n : X \rightarrow Y$  Abbildungen für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann heißt die Folge  $(f_n)$  *gleichmäßig konvergent* gegen eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$  für alle  $x \in X$  und alle  $n \geq N$ .
- Sind  $X, Y$  metrische Räume und ist  $(f_n)$  eine Folge stetiger Abbildungen  $f_n : X \rightarrow Y$ , die gleichmäßig gegen eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  konvergiert, so ist  $f$  stetig.
- Sind  $X, Y$  metrische Räume, so heißt eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass gilt: Sind  $x, y \in X$  mit  $d(x, y) < \delta$ , so ist  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .
- Ist  $X$  eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetige Abbildung, so ist  $f$  gleichmäßig stetig.

**Lemma 1.** Seien  $X, Y, Z$  metrische Räume. Gegeben seien eine Folge von Abbildungen  $f_n : X \rightarrow Y$ , die gleichmäßig gegen  $f : X \rightarrow Y$  konvergiert, und eine gleichmäßig stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow Z$ . Dann konvergiert die Folge  $(g \circ f_n)_n$  gleichmäßig gegen  $g \circ f$ .

**Lemma 2.** Sei  $X$  eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^k$ . Gegeben seien eine Folge von stetigen Abbildungen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die gleichmäßig gegen eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  konvergiert, und eine stetige Abbildung  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow Z$ , wobei  $Z$  ein metrischer Raum ist. Dann konvergiert die Folge  $(g \circ f_n)_n$  gleichmäßig gegen  $g \circ f$ .

**Def.** Seien  $X, Y$  metrische Räume,  $\mathcal{M}$  eine Menge von Abbildungen von  $X$  in  $Y$ . Dann heißt  $\mathcal{M}$  *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $f \in \mathcal{M}$  und alle  $x, y \in X$  mit  $d(x, y) < \delta$  gilt:  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Satz 2 (Arzelà-Ascoli).** Sei  $I$  ein kompaktes Intervall und  $\mathcal{M}$  eine gleichgradig stetige Menge von Abbildungen von  $I$  in  $\mathbb{R}^k$ . Für jedes  $x \in I$  gebe es ein  $C \geq 0$  mit  $\|f(x)\| \leq C$  für alle  $f \in \mathcal{M}$ . Ist  $(f_n)$  eine Folge in  $\mathcal{M}$ , so enthält  $(f_n)$  eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

**Satz 3 (Existenzsatz von Peano).** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(x_0, y_0) \in U$ . Dann existiert eine Lösung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  mit  $\varphi(x_0) = y_0$ .

Der Beweis ergibt sich in naheliegender Weise aus

**Lemma.** Sei  $K = [x_0, x_1]$  ein kompaktes Intervall, sei  $f : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig mit  $\|f(x, y)\| \leq C$  für alle  $(x, y) \in K \times \mathbb{R}^n$ . Sei  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann existiert eine stetige Abbildung  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt .$$

Zum Beweis dieses Lemmas setzt man zunächst die Funktion  $f$  auf ganz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  fort. Für jedes  $\alpha > 0$  ist es leicht, eine stetige Funktion  $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi_\alpha(x_0) = y_0$  zu finden, für die gilt:

$$\varphi_\alpha(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_\alpha(t - \alpha)) dt ,$$



so dass die Menge  $\mathcal{M}$  aller  $\varphi_\alpha|_K$  gleichgradig stetig ist. Nach Arzelà-Ascoli besitzt die Folge  $(\varphi_{1/m}|_K)_m$  eine Teilfolge, die gleichmäßig gegen eine Funktion  $\varphi$  konvergiert. Mittels Lemma 2 sieht man, dass

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt .$$

## Teil III: Der Satz über implizite Funktionen und seine Anwendungen

### 15. Der Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen

**Satz 1. (Umkehrsatz)** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ . Sei  $a \in U$  und die Matrix  $Df(a)$  sei invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung  $V$  von  $a$  in  $U$  und eine offene Umgebung  $V'$  von  $f(a)$  in  $\mathbb{R}^n$ , so dass  $f$  die Menge  $V$  bijektiv auf die Menge  $V'$  abbildet und die Umkehrabbildung  $h : V' \rightarrow V$  von der Klasse  $C^1$  ist mit

$$Dh(f(a)) = Df(a)^{-1} .$$

Ist außerdem  $f$  von der Klasse  $C^k$ , so auch  $h$ .

**Satz 2.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$ . Für jedes  $x \in U$  sei  $Df(x)$  invertierbar. Dann gilt:

- $f(U)$  ist offen in  $\mathbb{R}^n$ .
- Die Funktion  $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$  von  $U$  in  $\mathbb{R}^n$  nimmt nicht ihr Maximum an.
- Ist  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$ , so nimmt die Funktion  $\|f\|$  auch nicht ihr Minimum an.

**Bemerkung.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^2$  und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Sei

$$M := \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\} .$$

In der Regel ist es nicht explizit möglich, die Gleichung  $F(x, y) = 0$  nach  $y$  aufzulösen. Sei  $(x_0, y_0) \in M$  mit  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Wenn wir eine Umgebung  $V$  von  $x_0$  in  $\mathbb{R}$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x_0) = y_0$  und  $(x, f(x)) \in M$  für alle  $x \in V$  haben, so leiten wir die Gleichung

$$F(x, f(x)) = 0$$

nach der Kettenregel ab:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 .$$

Insbesondere:

$$f'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Der Satz über implizite Funktionen sagt, dass es immer ein solches  $f$  gibt.

**Bezeichnung.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$  und  $F = (F_1, \dots, F_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  partiell differenzierbar. Wir bezeichnen die partiellen Ableitungen von  $F_i$  mit

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \frac{\partial F_i}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial y_m}$$

und schreiben

$$\frac{\partial F}{\partial x} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

**Satz 3. (Satz über implizite Funktionen)** Sei  $U_1$  offen in  $\mathbb{R}^k$ ,  $U_2$  offen in  $\mathbb{R}^m$ ,  $x_0 \in U_1$ ,  $y_0 \in U_2$ . Sei  $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  von der Klasse  $C^1$  und  $F(x_0, y_0) = 0$ , und sei die Matrix  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$  invertierbar.

Dann gibt es eine Kugel  $B_r(x_0) =: U$  in  $\mathbb{R}^k$  mit  $U \subseteq U_1$  und eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $f(x_0) = y_0$ ,  $f(x) \in U_2$  und  $F(x, f(x)) = 0$  für alle  $x \in U$ .

Ferner ist  $f$  von der Klasse  $C^1$ , falls  $r$  klein genug ist, und hat in  $x_0$  die Ableitung

$$Df(x_0) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \right).$$

Ist  $F$  von der Klasse  $C^k$ , so auch  $f$ .

## 16. Extrema unter Nebenbedingungen und Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$

**Definition.** Sei  $U$  offen in  $\mathbb{R}^N$  und  $g := (g_1, \dots, g_{N-n}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$  von der Klasse  $C^1$  mit  $\text{Rang}(Dg(x)) = N - n$  für alle  $x \in U$ . Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^1$ . Ein Punkt  $a \in \mathbb{R}^N$  mit  $g(a) = 0$  heißt *lokales Maximum von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x) = 0$* , wenn es eine Umgebung  $V$  von  $a$  in  $U$  gibt, so dass  $f(a) \geq f(x)$  für alle  $x \in V$  mit  $g(x) = 0$ .

**Satz 1. (Methode der Lagrange-Multiplikatoren)** Die Bezeichnungen seien wie in der vorangegangenen Definition. Ist  $a$  ein lokales Maximum oder Minimum von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x) = 0$ , so gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-n} \in \mathbb{R}$  mit

$$\text{grad} f(a) + \lambda_1 \text{grad} g_1(a) + \dots + \lambda_{N-n} \text{grad} g_{N-n}(a) = 0.$$

Satz 1. folgt leicht aus Satz 5 am Ende dieses Paragraphen.

**Definition.** Sei  $p = 1, 2, \dots, \infty$ . Eine Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}^N$  heißt  *$n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit* des  $\mathbb{R}^N$  der Klasse  $C^p$ , wenn es für jedes  $a \in M$  eine offene Umgebung  $U$  von  $a$  in  $\mathbb{R}^N$  und eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$  der Klasse  $C^p$  gibt, so dass gilt:

- (1)  $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$
- (2)  $\text{Rang}(Df(a)) = N - n$

**Beispiel**  $S^{n-1} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0\}$  ist eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^\infty$  von  $\mathbb{R}^n$ .

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt:

**Satz 2.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse  $C^p$  des  $\mathbb{R}^N$ . Sei  $a = (a_1, \dots, a_N) \in M$ . Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten gibt es offene Umgebungen  $U'$  von  $(a_1, \dots, a_n)$  in  $\mathbb{R}^n$  und  $U''$  von  $(a_{n+1}, \dots, a_N)$  in  $\mathbb{R}^{N-n}$  und eine Abbildung  $h : U' \rightarrow U''$  der Klasse  $C^p$  mit

$$M \cap (U' \times U'') = \text{Graph}(h).$$

**Satz 3.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^N$ , sei  $0 \leq n \leq N$  und  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Dann sind äquivalent:

- a)  $M$  ist eine  $n$ -dimensionale  $C^p$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$ .
- b) Für jedes  $a \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U$  in  $\mathbb{R}^N$  und ein  $C^p$ -Diffeomorphismus  $h$  von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $U'$  von  $\mathbb{R}^N$  mit

$$h(M \cap U) = U' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

(Für die Implikation a)  $\Rightarrow$  b) benutzt man Satz 2. Die andere Richtung ist leicht.)

**Satz 4.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^N$ , sei  $0 \leq n \leq N$  und  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Dann sind äquivalent:

- a)  $M$  ist eine  $n$ -dimensionale  $C^p$ -Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$ .
- b) Für jedes  $a \in M$  existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $a$  in  $M$ , eine offene Teilmenge  $W$  in  $\mathbb{R}^n$  und eine Abbildung  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^N$  der Klasse  $C^p$ , die  $W$  homöomorph auf  $V$  abbildet und für die gilt:  $\varphi$  ist **Immersion**, d.h.  $\text{Rang } D\varphi(x) = n$  für alle  $x \in W$ .

Ein solches  $\varphi$  (manchmal auch  $\varphi^{-1}$ ) heißt eine *Karte* von  $M$ .

(Die Implikation a)  $\Rightarrow$  b) folgt aus Satz 2, die andere Richtung aus Satz 3.)

**Definition.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$  und  $a \in M$ . Ein Punkt  $v \in \mathbb{R}^N$  heißt *Tangentialvektor* an  $M$  in  $a$ , falls es ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  mit  $0 \in I$  und eine  $C^1$ -Abbildung  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  gibt mit

- (1)  $\psi(I) \subseteq M$ ,
- (2)  $\psi(0) = a$
- (3)  $\psi'(0) = v$ .

Die Menge  $T_a(M)$  aller Tangentialvektoren an  $M$  in  $a$  heißt der *Tangentialraum* an  $M$  in  $a$ .

**Satz 5.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^N$  und  $a \in M$ .

- a)  $T_a(M)$  ist ein  $n$ -dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^N$ .
- b) Sei  $\varphi : W \rightarrow V$  eine Karte von  $M$  und  $b \in W$  mit  $\varphi(b) = a$ . Dann ist

$$T_a(M) = \{D\varphi(b) \cdot w \mid w \in \mathbb{R}^n\} = \text{Bild } D\varphi(b).$$

- c) Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $a$  in  $\mathbb{R}^N$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$  von der Klasse  $C^1$  mit

- (1)  $M \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$
- (2)  $\text{Rang}(Dg(a)) = N - n$

Dann ist

$$T_a(M) = \{v \in \mathbb{R}^N \mid Dg(a) \cdot v = 0\} = \text{Kern } Dg(a).$$