## 4.2 Sätze über stetige reellwertige Funktionen

**Lemma 1:** Jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Bew.: $K$ kompakt $\Rightarrow$ $K$ beschränkt $\Rightarrow$ $\sup K < \infty$

Ferner existiert eine Folge $(x_n)$ in $K$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup K$. Da $K$ abgeschlossen ist, folgt $\sup K \in K$. Also existiert ein größtes Element. $\square$

(Entsprechend für das Minimum)

Als Folgerung aus Lemma 1 und Satz 4 aus A4.1 ergibt sich:

**Satz 1** (Satz vom Maximum und Minimum): Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt $f$ sein Maximum und sein Minimum an, d.h. es existieren $z_{1,2} \in K$, so daß

$$f(z_1) \leq f(z) \leq f(z_2) \quad \forall z \in K.$$

Bez.: In diesem Fall heißt $z_2$ eine Maximalstelle und $z_1$ eine Minimalstelle von $f$.

<u>Satz 2</u> (Zwischenwertsatz, ZWS): Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(a)<c<f(b)$. Dann existiert ein $\xi\in(a,b)$ mit $f(\xi)=c$.

Bew.: Wir definieren eine Intervallschachtelung $([a_n,b_n])_n$ durch $[a_0,b_0]=[a,b]$ und

$$[a_{n+1},b_{n+1}]=\begin{cases}[a_n,\frac{1}{2}(a_n+b_n)], & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2})\geq c\\ [\frac{1}{2}(a_n+b_n),b_n], & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2})<c.\end{cases}$$

Dann ist $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ und $b_n-a_n=2^{-n}(b-a)$, d.h. es liegt tatsächlich eine Intervallschachtelung vor. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert ein

$$\xi\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}[a_n,b_n] \text{ mit } \xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Aufgrund unserer Wahl der Intervalle $[a_n,b_n]$ ist

$$f(a_n)\leq c\leq f(b_n)\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

und daher aufgrund der Stetigkeit von $f$

$$f(\xi)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\leq c$$

sowie

$$f(\xi)=f(\lim_{n\to\infty}b_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\geq c.$$

$\square$

Also: $f(\xi)=c$.

Folgerung: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)>c>f(b)$, so existiert ein $\xi\in(a,b)$ mit $f(\xi)=c$.

(Wende Satz 2 an auf $\tilde{f}=-f$!)

<u>Anwendung</u>: Nullstellen und Periodizität der trigonometrischen Funktionen

<u>Satz 3</u>: Die Funktion $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ besitzt im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle.

Zur Vorbereitung benötigen wir:

<u>Lemma 2</u>: Für $x \in (0,2]$ gelten:

1. $\cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, insbes. $\cos(2) < -\frac{1}{3}$.
2. $\sin(x) > x - \frac{x^3}{6} > 0$.

<u>Bew.</u>: <u>1.</u> $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_3(x)$

mit $R_3(x) = \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = -\sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)}\right)}_{>0} < 0$

<u>2.</u> $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + R_2(x)$

mit $R_2(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)}\right)}_{>0}$,

also $R_2(x) > 0$ für $0 < x \leq 2$.

<u>Folgerung</u>: Wg. $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$ existiert nach dem ZWS ein $\xi \in (0,2)$ mit $\cos(\xi) = 0$, da $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Es bleibt die Eindeutigkeitsaussage in Satz 3 zu beweisen. Dazu definieren wir:

Def. (monotone Funktion) Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ heißt

1. (streng) monoton steigend $\Leftrightarrow x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(f(x)<f(y))$
2. ( " ) " fallend $\Leftrightarrow x<y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ $(f(x)>f(y))$

Bem. und Bsp.: (1) Ist $f$ streng monoton, so ist $f$ injektiv.

(2) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$ ist streng monoton steigend,

denn aus $\exp(x)>0$ folgt für $h>0$, daß

$$\exp(x+h) = \underbrace{\exp(h)}_{>1 \rightsquigarrow \text{ Übung zu Hause (A34)}} \cdot \exp(x) > \exp(x)$$

(3) $\cos: [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ ist streng monoton fallend,

denn für $0 \leq y < x \leq 2$ ist $\cos(x) - \cos(y)$

$$= -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{>0 \text{ nach Lemma 2}} < 0 .$$

i.V. (A35)

Mit (1) und (3) ist auch die Eindeutigkeit der Nullstelle in Satz 3 bewiesen.

Def.: Wir definieren $\frac{\pi}{2}$ als die eindeutig bestimmte Nullstelle von $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ im Intervall $[0,2]$.

Mit der Eulerschen Formel und den Additionstheoremen ergibt sich hieraus eine Reihe von

<u>Folgerungen:</u> (1) Wertetabelle

| $f(x)$ \ $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\exp(ix)$ | $1$ | $i$ | $-1$ | $-i$ | $1$ |
| $\sin(x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

1. Spalte: Potenzreihen

2. Spalte: $\cos(\frac{\pi}{2})$: Def., $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ (Pythagoras + Lemma 2)

$\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$ : Euler

1. Zeile: $\exp(ik\frac{\pi}{2}) = \exp(i\frac{\pi}{2})^k = i^k$ (Funktionalgleichung, gilt für $k \in \mathbb{Z}$)

Rest: Eulersche Formel.

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

(i) $\exp(z \pm i\frac{\pi}{2}) = \pm i \exp(z)$, $\exp(z+i\pi) = -\exp(z)$

sowie $\exp(z+2\pi i) = \exp(z)$

(die Exponentialfunktion ist also $2\pi i$-periodisch)

(ii) $\cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\sin(z)$, $\cos(z+\pi) = -\cos(z)$, $\cos(z+2\pi) = \cos(z)$

(iii) $\sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos(z)$, $\sin(z+\pi) = -\sin(z)$, $\sin(z+2\pi) = \sin(z)$

Begründungen: (i) Funktionalgleichung und (1)

(ii) $\cos(z+\pi/2) = \cos(z)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(z)\sin(\frac{\pi}{2}) \underset{(1)}{=} -\sin(z)$

$\cos(z+\pi) = \cos(z)\cos(\pi) - \sin(z)\sin(\pi) \underset{(1)}{=} -\cos(z)$

$\cos(z+2\pi) = \cos(z+\pi+\pi) = -\cos(z+\pi) = \cos(\pi)$.

(iii) Analog.

(3) (a) $\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Bew.: (a) P.d.: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, aus $\cos(x) = \cos(-x)$ folgt $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$. Mit $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ ergibt sich weiter $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$.

Für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ist – ebenfalls p.d. von $\pi$ – $\cos(x) > 0$, wg. $\cos(x) = \cos(-x)$ also auch $\cos(x) > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Folgerung (2), (ii) ($\cos(z) = -\cos(z+\pi)$) liefert: $\cos(x) < 0$ auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Mit der Periodizität von cos folgt: Der Abstand zweier benachbarter Nullstellen beträgt $\pi$. Also gibt es keine weiteren Nullstellen.

(b) ist wg. $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$ äquivalent zu (a).

(Auch in $\mathbb{C}$ gibt es keine weiteren Nullstellen von sin und cos $\longrightarrow$ Übungen)

Die Kenntnis dieser Nullstellen erlaubt die Definition der Tangens- und Cotangensfunktion:

Def.: (Tangens, Cotangens)

1. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ setzen wir

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)},$$

2. für $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

Wir kommen zur Frage der Stetigkeit der Umkehrfunktion einer streng monotonen stetigen Funktion, wie etwa der Exponentialfunktion.

<u>Lemma</u> 3: Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $\varphi : I \to J$ streng monoton und surjektiv. Dann ist $\varphi$ stetig.

<u>Bew.</u>: Annahme nicht. Dann existieren $x_0 \in I$ und eine Folge $(x_n)$ in $I$ mit $\varphi(x_n) \underset{(n\to\infty)}{\not\to} \varphi(x_0)$.

Bei folgenden Annahmen können wir dann o.B.d.A. machen:

1. $f$ streng monoton steigend (sonst: betrachte $-f$)
2. $x_n > x_0$ oder $x_n < x_0$ (Auswahl einer Teilfolge)
3. hiervon reicht es, den Fall $x_n > 0$ zu betrachten (sonst: untersuche $g(x) = f(-x)$ !)
4. $x_n \searrow x_0$ ($(x_n)$ monoton fallend, dies läßt sich durch erneute Auswahl einer Teilfolge erreichen.)

Unter den Voraussetzungen 1. und 4. ist $(\varphi(x_n))_n$ eine monoton fallende Folge, die nach unten durch $\varphi(x_0)$ beschränkt ist. Daher existiert

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) =: a > \varphi(x_0).$$

Dann ist aber $(\varphi(x_0), a) \subset J \setminus \varphi(I)$ im Widerspruch zur Voraussetzung der Surjektivität von $\varphi$. $\square$

Satz 4: Sind $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f: I \to J$ surjektiv und streng monoton. Dann ist $f$ stetig und bijektiv und die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: J \to I$$

ist ~~[illegible]~~ streng monoton und stetig.
in gleicher Weise

Bew.: Die Stetigkeit von $f$ folgt aus Lemma 3, da $f$ streng monoton ist, ist $f$ injektiv, also bijektiv. Damit existiert die Umkehrfunktion.

$$f^{-1}: J \to I$$

Ist $f$ streng monoton steigend, so nehmen wir an, daß $f^{-1}$ nicht streng monoton steigend ist. D.h. es existieren $x_0, y_0 \in I$ mit

$$f(x_0) < f(y_0) \quad \text{aber} \quad f^{-1}(f(x_0)) \geq f^{-1}(f(y_0)),$$

also mit

$$x_0 \geq y_0 \quad \text{und} \quad f(x_0) < f(y_0).$$

Widerspruch zu $f$ streng monoton steigend.
Falls $f$ streng monoton fällt, zeigt ein ähnliches Argument, daß auch $f^{-1}$ streng monoton fällt.
Die Stetigkeit von $f^{-1}$ folgt jetzt wieder aus Lemma 3.

Bem. und Bsp.:

(1) Die Stetigkeit der Umkehrfunktion in Satz 4 beruht auf der Monotonie von $f$ und damit auf der Anordnung von $\mathbb{R}$. Im allg. ist die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion nicht stetig:

$$f : [0, 2\pi) \to S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad x \mapsto f(x) = e^{ix}$$

ist stetig und bijektiv, aber die Inverse

eine solche Darst. ex. immer, s.u.

$$f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi), \quad e^{ix} \mapsto f^{-1}(e^{ix}) := x$$

ist unstetig in $z_0 = 1 = e^{i \cdot 0}$. Denn in jeder Umgebung von $z_0$ gibt es $z \in S^1$ mit $f^{-1}(z) \geq \pi$!

(2) Die Existenz $p$-ter Wurzeln zu einer natürlichen Zahl $p$ hatten wir konstruktiv durch das "babylonische Wurzelziehen" gewonnen:

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

$p = 2$: Vorl.

$p \geq 3$: Übung, A19

Satz 4 liefert einen weiteren Beweis:

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto f(x)$ ist stetig und streng monoton steigend (für $0 \leq y < x$: $x^p - y^p = (x-y)\sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k > 0$ – geometrische Summenf.) und surjektiv: $f(0) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ sowie ZWS. Die durch Satz 4 garantierte Umkehrfunktion ist gerade die $p$-te Wurzel: $f^{-1}(y) = \sqrt[p]{y}$.