3.2 Umordnung von Reihen und das Cauchy-Produkt

Wir beginnen mit einigen Folgerungen aus dem Majorantenkriterium:

Lemma 1: Es sei $(c_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $c_n = a_n + i b_n$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert genau dann absolut, wenn beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren.

Bew.: Folgt aus den Ungleichungen

$$|c_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2|c_n|$$

und dem Majorantenkriterium. $\square$

Für eine reelle Zahl x setzen wir $x^+ := \max(x, 0)$ und $x^- = \max(-x, 0)$, so daß $x = x^+ - x^-$ und $|x| = x^+ + x^-$.

Lemma 2: Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Dann gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \text{ konvergieren.}$$

Bew.: $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ und $a_n^{\pm} \leq |a_n|$

und Majorantenkriterium. $\square$

Folgerung: Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, so divergieren beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Bew. Konvergieren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nach Lemma 2 ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Diese recht einfachen Beobachtungen bilden den Schlüssel zum Beweis des nachfolgenden Riemannschen Umordnungssatz.

Def.: Es sei $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 1 (Riemann): Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = c$.

Bem.: Unter den Voraussetzungen des Satzes existieren auch Umordnungen von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = -\infty$. Daher nennt man solche Reihen auch bedingt konvergent.

<u>Beweisidee:</u> (a_n) zerfällt vollständig in zwei Teilfolgen $(a_{n_k})_k$ und $(\tilde{a}_{n_k})_k$ mit

$$\tilde{a}_{n_k} < 0 \leq a_{n_k}$$

und nach der Folgerung aus Lemma 2 gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty = -\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_{n_k} . \qquad (*)$$

Sei nun $c \in \mathbb{R}$ vorgelegt, o. E. $c \geq 0$, so wählt man

$$a_{\sigma(1)} = a_{n_1}, \dots, a_{\sigma(N)} = a_{n_N}$$

so daß $\sum_{n=1}^{N-1} a_{\sigma(n)} \leq c < \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(N)}$,

anschließend $a_{\sigma(N+1)} = \tilde{a}_{n_1}, \dots, a_{\sigma(N+M)} = \tilde{a}_{n_M}$,

so daß $\sum_{n=1}^{M-1} a_{\sigma(n)} \geq c > \sum_{n=1}^{M} a_{\sigma(n)}$.

Beides ist möglich nach (*). Anschließend summiert man wieder positive Folgenglieder auf, bis c überschritten wird, dann wieder negative, etc. Nach (*) bricht dieser Prozess niemals ab.

Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} = 0$

und daher $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = c$.

Bsp.: Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \underbrace{1-\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{\geq 0} + \ldots =: C \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Umordnung:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \ldots - \ldots - \ldots + \ldots \text{ usw.}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots - \ldots + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\right)$$

$$= \frac{C}{2} \neq C.$$

Derartige Pathologien sind bei absolut konvergenten Reihen ausgeschlossen, wie der folgende Satz zeigt:

<u>Satz 2</u> (Umordnungssatz): Es sei (a_n) eine komplexe Zahlenfolge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Dann konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$.

<u>Bem.</u>: Man nennt daher absolut konvergente Reihen mitunter auch <u>unbedingt</u> <u>konvergent</u>.

Bew. des Satzes:

1. Zunächst sei $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

denn alle Summanden in der endlichen Summe links stehen auch in der Reihe rechts auf. Das Majorantenkrit. liefert die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$; da die Ungleichung im Grenzwert $N \to \infty$ erhalten bleibt, haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Dasselbe Argument ergibt auch die Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

2. Angewendet auf $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ erhalten wir aus dem Teilergebnis in 1.:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergiert absolut und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$.

3. Wir betrachten den Fall $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir mit Lemma 2:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

$\Longrightarrow$ Beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergieren.

$\underset{1.}{\Longrightarrow}$ " " $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+$ " $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-$ " .

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergiert und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}^{+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}^{-}$$

$$\underset{1.}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

4. Sind allgemein $a_k \in \mathbb{C}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ so ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$$

$$\underset{3.}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_{\sigma(k)} + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} .$$

$\square$

Den gerade bewiesenen Umordnungssatz kann man als Kommutativgesetz für absolut konvergente Reihen auffassen. Dann stellt sich natürlich die Frage nach einer entsprechenden Verallgemeinerung des Distributivgesetzes. Anders formuliert: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_k b_m\right) \quad ?$$

$$\left(=: \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_k b_m \right)$$

Überraschenderweise ist hierfür lediglich die Konvergenz beider Reihen erforderlich:

Lemma 3: Es seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_k b_m = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_m .$$

Bew.: Wir verwenden $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $\lambda = \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ und erhalten

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) \cdot a_k .$$

Nun ist aber auch $\mu \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} \mu b_m$, mit $\mu = a_k$ ergibt sich

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) a_k = \sum_{m=1}^{\infty} a_k b_m .$$

Durch Zsf. folgt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_k b_m .$$

Entsprechend für die andere Summationsreihenfolge. □

Bem.: Ohne die Produktstruktur der Summanden und ohne die Vor. der absoluten Konvergenz wird die Aussage falsch. Bsp.: $a_{km} = \begin{cases} 0 & \text{für } k=m \\ \frac{1}{k^2-m^2} & \text{für } k \neq m \end{cases}$

Dann ist $0 \neq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{km}}_{\substack{\text{nichttriviale} \\ \text{Rechnung mit} \\ \text{Teleskopreihen!}}} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{km}$ da $a_{km} = -a_{mk}$

$= -\frac{\pi^2}{8}$

→ Tutorium

Die beiden Summationsverfahren aus Lemma 3 können folgendermaßen veranschaulicht werden:

$\bullet$	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$	$\sum_{n=0}^{\infty}$
b_0	$a_0 b_0$ (c_0)	$a_1 b_0$ (c_1)	$a_2 b_0$ (c_2)	—	—		$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_0$
b_1	$a_0 b_1$ (+)	$a_1 b_1$ (+)	$a_2 b_1$	—	—		$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_1$
b_2	$a_0 b_2$	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	—			$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
b_m					$a_n b_m$		
$\vdots$							
$\sum_{m=0}^{\infty}$	$\sum_{m=0}^{\infty} a_0 b_m$	$\sum_{m=0}^{\infty} a_1 b_m$	$\dots$				$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_m$ / $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m$

Aussage des Lemmas: Beide Summationsreihenfolgen führen für lediglich konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zum selben Ergebnis.

3. <u>Möglichkeit</u> Bilde zunächst die endlichen Summen über die Diagonalen von rechts oben nach links unten, also

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

und summiere anschließend über c_n!

Def.: Für Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ heißt die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, b_k = \sum_{\substack{0\leq k,l\leq n \\ k+l=n}} a_l\, b_k$$

die <u>Faltung</u> der Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$.

Das vorgeschlagene Summationsverfahren ist mit einer Reihenanordnung verbunden und führt im allgemeinen nicht zum Ziel:

Bsp.: $(a_n) = (b_n) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad (n\geq 0)$.

Für die Faltung von (a_n) mit (b_n) erhalten wir

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n+1-k}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1-k}} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\Rightarrow |c_n| \geq \underbrace{(n+1)}_{\text{Anz. der Summanden}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\text{untere Schranke für alle Summanden.}} = 1$$

Also: (c_n) ist keine Nullfolge, somit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent, obwohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergieren.

Unter der Voraussetzung der absoluten Konvergenz beider Reihen erhält man jedoch das gewünschte Ergebnis:

Satz 3 (Cauchy-Produkt von Reihen): Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ absolut konvergente Reihen und $(c_n)_{n\geq 0}$ die Faltung von $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

Bew.: (1) $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Dann ist

$$\sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} a_n b_m$$

denn: Alle Summanden links treten auch rechts auf.

$$\xrightarrow[3]{\text{Lemma}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

Für $N \to \infty$ erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

gilt auch hier!

Umgekehrt:

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} a_n b_m \leq \sum_{n=0}^{2N} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k}_{=c_n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Im Grenzwert $N \to \infty$ ergibt sich wieder mit Lemma 3

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

und damit die geforderte Identität.

(2) $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Hier gilt

$$|c_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}||b_k| \qquad (\Delta\text{'s-Ungleichung})$$

und daher nach (1)

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}||b_k| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|\right).$$

Für $N \to \infty$ ergibt sich also die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

(3) Nachweis der Identität für $a_n, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^+ - \sum_{m=0}^{\infty} b_m^-\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^+\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^+\right)$$

$$- \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^-\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^-\right)$$

$$\underset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}^+ b_k^+ - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}^- b_k^+$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}^+ b_k^- + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}^- b_k^-$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k^+ - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k^-$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

(4) Für $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ zerlegt man in Real- und Imaginärteil und führt die Rechnung ähnlich wie in (3) durch. $\square$