1. Grundlagen

1.1 Mengen und Abbildungen

Von fundamentaler Bedeutung sowohl für die Algebra wie auch für die Analysis ist der Begriff der Menge. Er wurde 1895 von Georg Cantor im wesentlichen folgendermaßen eingeführt:

Def.: (Menge, Element): Eine Menge ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen. Die Objekte, die in einer Menge M enthalten sind, heißen die Elemente von M. Hierbei muß prinzipiell entscheidbar sein, ob ein Element zu M gehört oder nicht.

Bem.: Dies ist keine "exakte" Definition, denn sie enthält Begriffe wie 'Zusammenfassung' und 'Objekte', die nicht genau festgelegt sind.

Bez.: $x \in M$ (gelesen: 'x Element M'), wenn das Objekt x zur Menge M gehört, andernfalls $x \notin M$.

Es gibt zwei Möglichkeiten der Beschreibung von Mengen:

1. durch Aufzählung, z. B.

$$M_1 = \{2, 4, 6, 8\} \qquad \text{oder} \qquad M_2 = \{7, X, \Delta, !\},$$

es können also durchaus verschiedenartige Objekte in einer Menge zusammengefaßt werden. Auf die Reihenfolge kommt es hierbei nicht an und in der Regel wird jedes Objekt nur einmal genannt (beachte: "verschieden" in der Def.). Wir haben also

$$M_1 = \{4, 8, 6, 2\} = \{2, 4, 8, 6, 2\}.$$

Diese Art der Beschreibung ist in erster Linie geeignet für endliche Mengen (= Mengen mit endlich vielen Elementen, aber auch

$$M_3 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

ist eine zulässige Beschreibung der geraden natürlichen Zahlen (ein Bildungsgesetz muß hier eindeutig erkennbar sein).

2. durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft $E(x)$, allgemein in der Form

$$M = \{x : E(x)\}$$

z. B. haben wir

$M_1 = \{x : x$ ist eine positive gerade Zahl kleiner als $10\}$

oder

$M_3 = \{x : x$ ist eine gerade natürliche Zahl$\}$.

Vorsicht: Nicht jede Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft führt zu einer wohldefinierten Menge! z.B. ist die sogenannte Russelsche Mnenge

$$M_R = \{x : x \text{ ist Menge}, x \notin x\}$$

keine Menge im Sinn der obigen Definition, da nicht entscheidbar ist, ob $M_R \in M_R$ gilt oder nicht. (Die Annahme $M_R \in M_R$ führt sofort auf $M_R \notin M_R$ und umgekehrt.)

Hingegen ist

$M_4 = \{x : x$ ist eine Primzahl$\}$

eine wohldefinierte Menge, auch wenn heute (noch) niemand entscheiden kann, ob z.B. $2^{99991} - 1$ eine Primzahl ist oder nicht. Es ist prinzipiell entscheidbar und damit M_4 wohldefiniert. = 03.04.12

Das Bsp. M_R zeigt: Probleme mit dem "naiven" Cantorschen Mengenbegriff treten auf, wenn man Mengen von Mengen untersucht. Solche Probleme treten nicht auf, wenn man Mengen von gleichartigen

Objekten betrachtet, wie z.B. Mengen von Zahlen, an denen wir in der Analysis in erster Linie interessiert sind. Beispiele solcher Zahlenmengen sind:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (natürliche Zahlen)
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ (natürliche Zahlen mit 0)
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ (ganze Zahlen)
- $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \}$ (rationale Zahlen)
- $\mathbb{R} = \{ a, a_1 a_2 \dots : a \in \mathbb{Z};\ a_1, a_2, \dots \in \{0, \dots 9\} \}$ (reelle Zahlen, $\hat{=}$ Dezimalbrüche)

- Intervalle: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ definiert man

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} \quad \text{(abgeschlossen)}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{(offen)}$$

$$\left.\begin{aligned} [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} \end{aligned}\right\} \text{(halboffen)}$$

sowie uneigentliche Intervalle wie z.B.:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\} \quad \text{oder}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

Beim "<" und "≤" später genauer!

"unendlich", keine reelle Zahl!!!

Bei dieser Aufzählung, insbes. bei den Intervallen, haben wir in gewisser Weise den Begriff der Teilmenge vorweggenommen:

Def. (Teilmenge, Mengengleichheit und leere Menge):

(i) Eine Menge M_1 heißt Teilmenge einer Menge M_2, falls alle Elemente von M_1 in M_2 enthalten sind

Schreibweise: $M_1 \subset M_2$, falls $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$

Teilmenge, enthalten

daraus folgt, dies impliziert

(ii) Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, kurz

$$M_1 = M_2 \;:\Leftrightarrow\; M_1 \subset M_2 \text{ und } M_2 \subset M_1$$

definiert als

genau dann, wenn (gdw)

ist äquivalent zu

engl.: if and only if (iff)

(iii) Die leere Menge ist diejenige Menge, welche kein Element enthält. Sie wird mit $\emptyset$ (oder $\{\}$) bezeichnet.

Bem.: Für jede Menge M gilt $\emptyset \subset M$.

Def. (Verknüpfung von Mengen): M_1 und M_2 seien Mengen. Dann heißen:

(i) $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ die Vereinigung,

(ii) $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ der (Durch-)Schnitt,

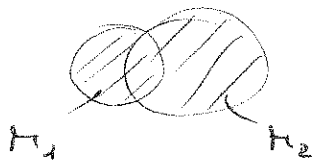
(iii) $M_1 \setminus M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ die Differenz und

(iv) $M_1 \Delta M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ die symmetrische Differenz der Mengen M_1 und M_2.

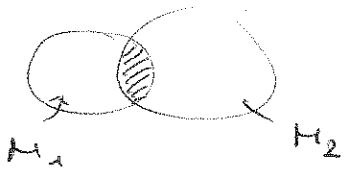
Bem.: • Ohne den Begriff der leeren Menge hätten wir den Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ nicht für beliebige Mengen M_1 und M_2 definieren können. Zwei Mengen mit der Eigenschaft $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ nennt man disjunkt.

• Diese Operationen von Mengen können durch sogenannte Venn-Diagramme gut veranschaulicht werden:

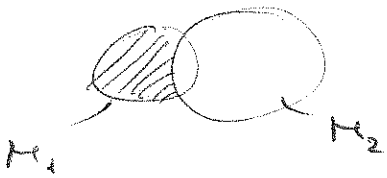
(i)



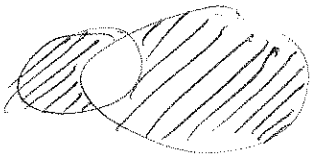
(ii)



(iii)



(iv)



Solche Diagramme sind oft nützlich, haben aber keinerlei Beweiskraft.

Satz 1 (Rechenregeln für Mengenverknüpfungen): M_1, M_2 und M_3 seien Mengen. Dann gelten:

(i) Kommutativität: $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$; $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$

(ii) Assoziativität: $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$, desgl. für $\cap$.

(iii) Distributivität:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

Exemplarisch wird der Beweis des ersten Distributivgesetzes gegeben:

$$x \in M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \Leftrightarrow x \in M_1 \text{ und } x \in M_2 \cup M_3$$

$$\Leftrightarrow x \in M_1 \text{ und } (x \in M_2 \text{ oder } x \in M_3)$$

$$\Leftrightarrow (x \in M_1 \text{ und } x \in M_2) \text{ oder } (x \in M_1 \text{ und } x \in M_3)$$

$$\Leftrightarrow x \in M_1 \cap M_2 \text{ oder } x \in M_1 \cap M_3 \Leftrightarrow x \in (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$$

Also enthalten $M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ und $(M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$ dieselben Elemente und sind daher gleich. $\square$

Zur <u>Übung</u> empfohlen: Beweis des 2. Distributivgesetzes, ggf. Veranschaulichung als Venn-Diagramm

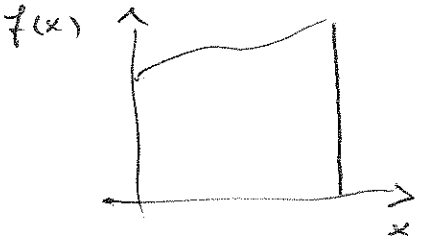
Neben Mengen von Zahlen bzw. allgemeiner Mengen gleichartiger Objekte aus einer wohldefinierten Grundmenge werden wir aber bereits in der Analysis I Mengen von Mengen betrachten.

Bsp. • Approximation einer reellen Zahl x durch eine Folge von Intervallen

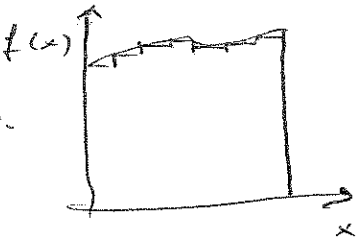
$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \ni x$$

Hier betrachtet man also eine Menge von Intervallen!

• Approximative Berechnung von Flächen bei der Integration



wird approximiert durch endliche Vereinigung von Rechtecken.



Auch hier werden Mengen von Mengen (bzw. Folgen von Mengen) zur näherungsweisen Berechnung benutzt.

Bisher haben wir nur endliche Vereinigungen und Durchschnitte betrachtet. Dies können wir in der folgenden Art und Weise verallgemeinern:

<u>Def.</u>: Sei X eine Menge und $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf X. Dann setzen wir

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \in X : \text{es gibt ein } M \in \mathcal{M} \text{ mit } x \in M\}$$

und

$$\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \in X : x \in M \text{ für alle } M \in \mathcal{M}\}.$$

<u>Bez.</u>: Ist $\mathcal{M} = \{M_i : i \in I\}$ mit einer sogenannten Indexmenge I, so schreibt man $\bigcup_{i \in I} M_i := \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ und entsprechend $\bigcap_{i \in I} M_i := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$. Am häufigsten verwendet man $\mathbb{N}$ als Indexmenge.

Der Zusammenhang zwischen Schnitt und Vereinigung einerseits und Komplementbildung andererseits wird durch die de Morgan'schen Regeln hergestellt:

<u>Satz 2</u> (de Morgan): Sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf einer Menge X. Dann gelten

$$\text{(i)} \left(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \right)^c = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M^c \; ; \; \text{(ii)} \left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \right)^c = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M^c$$

(Beweis als Übungsaufgabe!)

Wie wir gesehen haben (anhand der Russell'schen Menge) können solche Mengen von Mengen zu Widersprüchen führen, wenn man den einfachen Cantor'schen Mengenbegriff verwendet. (Weiteres Bsp.: Menge aller Mengen!)
↳ Gibt's nicht!

Ausweg: Man zeichnet eine wohldefinierte Grundmenge X aus und betrachtet Mengen von Teilmengen von X, sog. Mengensysteme:

<u>Def.</u> (Potenzmenge, Mengensystem): Es sei X eine Menge. Dann heißt (die Menge aller Teilmengen von X)

$$\mathcal{P}(X) := \{M : M \subset X\}$$

die <u>Potenzmenge</u> von X. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ heißt <u>Mengensystem</u> auf X.

<u>Bsp.</u>: (i) $X = \{a, b, c\}$. Dann ist

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

(ii) $X = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ $(\neq \emptyset\,!)$

<u>Übung</u>: Wieviel Elemente hat $\mathcal{P}(X)$, wenn X N Elemente besitzt? (Beantwortung dieser Frage in einer der nächsten Sitzungen!)

Ist eine Grundmenge X ausgezeichnet, macht es Sinn, vom Komplement einer Teilmenge $M \subset X$ zu reden:

<u>Def.</u>: X sei eine Menge, $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißt $M^c := X \setminus M$ das <u>Komplement von M in X</u>.

Eine weitere wichtige Konstruktion neuer Mengen aus bekannten erhält man mit dem kartesischen Produkt:

Def. (kartesisches Produkt) X und Y seien Mengen. Dann heißt

$$X \times Y := \{(x,y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

das <u>kartesische Produkt</u> von X und Y. Seine Elemente werden als <u>geordnete Paare</u> bezeichnet.

Bem.: (i) Geordnet bedeutet, dass i. allg. $(x,y) \neq (y,x)$. Im Gegensatz zu Mengen kommt es hier also auf die Reihenfolge an!

(ii) Es gilt $(x,y) = (x',y') \iff x = x'$ und $y = y'$.

(iii) Verallgemeinerung: Sind $X_1, \dots, X_n$ Mengen, so heißt

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

das kartesische Produkt von X_1 bis X_n. Seine Elemente werden als n-Tupel (im Fall $n=3$ als Tripel) bezeichnet.
Auch hier ist die Reihenfolge zu beachten!

Wir kommen jetzt zum zentralen Begriff der Abbildung oder Funktion!

Def. (Abbildung / Funktion): Gegeben seien zwei Mengen X und Y. Unter einer <u>Abbildung</u> oder <u>Funktion</u> f von X nach Y versteht man eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Bezeichnungen und Bemerkungen:

(i) Die Menge X in dieser Def. heißt der <u>Definitionsbereich</u> der Abbildung f, die Menge Y ihr <u>Zielbereich</u> ($\neq$ Wertebereich!, s.u.).

(ii) Eine Abbildung wird vollständig charakterisiert durch Angabe von Definitionsbereich, Zielbereich und Zuordnungsvorschrift. Typischerweise:

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x) \quad (= \ldots \text{ Zuordnungsvorschrift}).$$

Abbildungen mit gleicher Zuordnungsvorschrift aber unterschiedlichem Definitionsbereich können sich in wesentlichen Eigenschaften unterscheiden!

(iii) Die Teilmenge

$$G(f) := \{ (x, f(x)) \in X \times Y \}$$

von $X \times Y$ heißt der Graph der Abbildung f.

(iv) Genau betrachtet ist die oben gegebene Definition insofern tautologisch, als der Begriff Abbildung durch den ebenfalls nicht definierten Begriff der Zuordnung erklärt wird.

Dies läßt sich folgendermaßen vermeiden:

Man identifiziert eine Abbildung mit ihrem Graphen und definiert:

Def (Abbildung, 2. Versuch): Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist eine Teilmenge $G(f) \subset X \times Y$ mit der Eigenschaft: Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$, so daß $(x,y) \in G(f)$ gilt. Dieses Element y von Y wird mit $f(x)$ bezeichnet.

(Diese Definition ist logisch einwandfrei, aber umständlich. Wir benutzen daher die erstgenannte Definition.)

Def. (Bild und Urbild): Es sei $f: X \to Y$ eine Abbildung, $M \subset X$ und $N \subset Y$. Dann heißen

(i) $f(M) := \{f(x) : x \in M\}$ das Bild von M unter f und

(ii) $f^{-1}(N) := \{x \in X : f(x) \in N\}$ das Urbild von N unter f.

Speziell: $f(X)$ heißt Wertebereich oder Bild von f.
i. allg.: Wertebereich $\subsetneqq$ Zielbereich, d.h. $f(X) \subsetneqq Y$.

Wie vertragen sich Bild und Urbild mit Vereinigung und Durchschnitt? Die Antwort darauf gibt der folgende Satz:

Satz 3: Es sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.

1. Ist $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf X, so gelten

$$f\Big(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\Big) = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} f(M) \quad ; \quad f\Big(\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M\Big) \subset \bigcap_{M\in\mathcal{M}} f(M)$$

2. Ist $\mathcal{N}$ ein Mengensystem auf Y, so sind

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{N\in\mathcal{N}} N\Big) = \bigcup_{N\in\mathcal{N}} f^{-1}(N) \quad ; \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{N\in\mathcal{N}} N\Big) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}} f^{-1}(N).$$

Bem.: Im 2. Teil von 1. gilt i. allg. nicht Gleichheit.

Bsp. $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow f\Big(\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M\Big) = f(\emptyset) = \emptyset$.

$f(x) = y_0$ für alle $x \in X$ (f konstant) $\Rightarrow \bigcap_{M\in\mathcal{M}} f(M) = \{y_0\}$.

Exemplarisch wird der erste Teil von 1. bewiesen, den Rest von 2. diskutieren wir in den Übungen.

$$y \in f\Big(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\Big) \iff \exists\, x \in \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M \text{ mit } f(x) = y$$

$$\iff \exists\, M_0 \in \mathcal{M},\ x \in M_0 \text{ mit } f(x) = y$$

$$\iff \exists\, M_0 \in \mathcal{M} \text{ mit } y \in f(M_0)$$

$$\iff y \in \bigcup_{M\in\mathcal{M}} f(M) \qquad \square$$

Def.: Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt

(i) injektiv, falls für $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

(ii) surjektiv, wenn zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so daß $y = f(x)$;

(iii) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bsp.: Diese Eigenschaften sind wesentlich vom Definitions- und Zielbereich einer Funktion abhängig. Bsp.:

1.14

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x) = x^2$$

(a) $X = Y = \mathbb{R}$: weder, noch

(b) $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,\infty)$: surjektiv, nicht injektiv

(c) $X = [0,\infty)$, $Y = \mathbb{R}$: injektiv, nicht surjektiv

(d) $X = Y = [0,\infty)$: bijektiv

Def.: (Verknüpfung / Komposition von Abbn.) Es seien X_1, X_2, X_3 Mengen, $f_1 : X_1 \to X_2$ und $f_2 : X_2 \to X_3$ Abbildungen. Dann ist ihre <u>Verknüpfung</u> (Verkettung, Komposition) $f_2 \circ f_1$ (gelesen: f_2 nach f_1) definiert durch

$$f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3, \quad x \mapsto f_2 \circ f_1(x) := f_2(f_1(x)).$$

Def. (Umkehrabbildung einer Bijektion): Es sei $f : X \to Y$ bijektiv. Die Abbildung

$$f^{-1} : Y \to X, \quad y \mapsto f^{-1}(y),$$

definiert durch $f^{-1}(y) = x$, falls $f(x) = y$, heißt <u>Umkehrabbildung</u> (Inverse) von f.

Bem.:
- Nicht zu verwechseln mit dem Urbild von Mengen
- $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$.