Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2024

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Algebra – Blatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 07.05.2024, 12:00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte geben Sie Lösungen zu den ersten beiden Aufgaben ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Algebra_SS24/`.

Aufgabe 4.1 (8 Punkte)

Zeigen Sie den *Satz von Cayley*: Ist G eine Gruppe, so gibt es eine Menge X mit $|X| \le |G|$, sodass G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Sym}(X)$ ist. Insbesondere ist jede endliche Gruppe isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Sym}(n)$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$.
(*Hinweis:* Wählen Sie $X = G$ und betrachten Sie die Abbildung $G \to \mathrm{Sym}(X)$, $g \mapsto \rho_g$ mit $h\rho_g = hg$ für alle $h \in G$.)

Aufgabe 4.2 (8 Punkte)

Sei G eine Gruppe, und seien $H, K, L \le G$. Für Teilmengen $X, Y \subseteq G$ schreiben wir $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq G$.

(a) Illustrieren Sie anhand eines konkreten Beispiels, daß HK im allgemeinen keine Untergruppe von G ist.

(b) Zeigen Sie: Gilt $HK = KH$, so ist HK eine Untergruppe von G. Folgern Sie, daß HK stets eine Untergruppe von G bildet, wenn $K \trianglelefteq G$ ist.

(c) Beweisen Sie das folgende *Modularitätsgesetz*: Ist $K \le L$ und gelten $K \cap H = L \cap H$ sowie $KH = LH$, so ist $K = L$.

(d) Beweisen Sie das *Dedekindsche Modularitätsgesetz*: Ist $K \le L$, so folgt $KH \cap L = K(H \cap L)$.

Aufgabe 4.3

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ paarweise verschieden und $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ eine beliebige Permutation. Zeigen Sie:

$$(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m)^\sigma = \sigma^{-1} \cdot (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m) \cdot \sigma = (i_1\sigma \ i_2\sigma \ \dots \ i_m\sigma).$$

Wie verallgemeinert sich diese Konjugations-Formel auf beliebige Elemente von $\mathrm{Sym}(n)$?

(b) Zerlegen Sie $\mathrm{Sym}(4)$ in *Konjugationsklassen* $\{\rho^\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Sym}(4)\}$, $\rho \in \mathrm{Sym}(4)$. Bestimmen Sie daraufhin mit dem Satz von Lagrange alle Normalteiler von $\mathrm{Sym}(4)$.

Aufgabe 4.4

Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $\eta\colon G \to G/N$ der kanonische Homomorphismus. Sei H eine weitere Gruppe und $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

Weisen Sie die folgende *universelle Eigenschaft der Faktorgruppe* nach:

(a) Es gibt genau dann einen Homomorphismus $\bar\varphi\colon G/N \to H$ mit der Eigenschaft $\eta\bar\varphi = \varphi$, wenn $N \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(b) Gibt es einen Homomorphismus $\bar\varphi$ wie in (a), so ist dieser bereits eindeutig.