Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2024

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Algebra – Blatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 30.04.2024, 12:00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte geben Sie Lösungen zu den ersten beiden Aufgaben ab; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Algebra_SS24/.

Aufgabe 3.1 (10 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Primkörper mit p Elementen. Mit $\mathbb{F}_p^\times$ bezeichnen wir die multiplikative Gruppe der von 0 verschiedenen Elemente in $\mathbb{F}_p$.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. (*Hinweis*: Nutzen Sie aus, daß $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ der Kern des Homomorphismus $\det\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p^\times$ ist.)

(b) Finden Sie einen Isomorphismus von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ auf $\mathrm{Sym}(3)$. (*Hinweis*: Bezeichnen Sie die von Null verschiedenen Vektoren von $\mathbb{F}_2^2$ mit $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,1)$, $v_3 = (0,1)$. Verwenden Sie, daß jedem $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ eindeutig eine Permutation $\sigma_g \in \mathrm{Sym}(3)$ zuteil wird, so daß gilt: $(v_i)g = v_{i\sigma_g}$ für $i \in \{1,2,3\}$.)

(c) Verwenden Sie (b) und Beispiel (5) in (2.9) der Vorlesung (vgl. Aufgabe 2.3), um alle Untergruppen und unter diesen alle Normalteiler von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ explizit anzugeben.

(d) Zeigen Sie, daß in einer Gruppe G das *Zentrum* $\mathrm{Z}(G) = \{z \in G \mid \forall x \in G : zx = xz\}$ stets eine charakteristische Untergruppe von G bildet.

(e) Ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathrm{Sym}(4)$? (*Hinweis:* Bestimmen Sie in beiden Gruppen das Zentrum.)

Aufgabe 3.2 (6 Punkte)

Sei K ein Körper, und betrachten Sie den Ring $R = \mathrm{Mat}_2(K)$.

(a) Zeigen Sie, daß die folgenden Teilmengen Unterringe von R bilden:

$$S_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \mid a,b \in K\}, \quad S_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \mid a,b,c \in K\}, \quad S_3 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a,b \in K\}.$$

(b) Zeigen Sie: Außer $\{0\}$ und R besitzt R keine *Ideale*, d.h., Unterringe I mit der zusätzlichen Eigenschaft: $rx, xr \in I$ für alle $x \in I$ und $r \in R$.[1] (*Hinweis:* Verwenden Sie elementare Zeilen- und Spaltenumformungen, wie in der Linearen Algebra I.)

(c) Ein *Linksideal* von R ist ein Unterring U, für den zusätzlich gilt: $rx \in U$ für alle $r \in R$ und $x \in U$. Bestimmen Sie alle Linksideale von R.[2]

Aufgabe 3.3

Sei G eine Gruppe, und seien $M, N \trianglelefteq G$ mit $M \cap N = \{1\}$. Zeigen Sie: (a) $xy = yx$ für alle $x \in M$ und $y \in N$; (b) gilt zusätzlich $MN = G$, so folgt $G \cong M \times N$.[3]

Aufgabe 3.4

Die Menge $\{1,2,3,4\}$ besitzt genau drei Partitionen in Teilmengen der Mächtigkeit 2, nämlich: $P_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $P_2 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $P_3 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$. Jedes $g \in \mathrm{Sym}(4)$ vermittelt eine Permutation von $\{P_1,P_2,P_3\}$, also von $\{1,2,3\}$. Zeigen Sie, daß sich auf diese Weise ein Homomorphismus $\vartheta\colon \mathrm{Sym}(4) \to \mathrm{Sym}(3)$ ergibt. Bestimmen Sie Kern und Bild von ϑ, und verifizieren Sie direkt, daß $|\mathrm{Sym}(4)| = |\mathrm{Kern}(\vartheta)||\mathrm{Bild}(\vartheta)|$ gilt.

[1] Ein Ring R, der kein Nullring ist und der nur die Ideale $\{0\}$ und R besitzt, heißt *einfach*.
[2] Eine ähnliches Ergebnis ergibt sich für entsprechend definierte *Rechtsideale* von R. Welches?
[3] Das *Produkt* $G_1 \times G_2$ zweier Gruppen G_1, G_2 ist bzgl. $(x,y)\cdot(\tilde{x},\tilde{y}) = (x\tilde{x}, y\tilde{y})$ wieder eine Gruppe.