Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2024

Algebra – Blatt 2

Abgabe der Lösungen bis zum 23.04.2024, 12:00 Uhr in dem dafür vorgesehenen Kasten

Bitte geben Sie Lösungen zu den ersten beiden Aufgaben ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Algebra_SS24/`.

Aufgabe 2.1 (8 Punkte)

Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Der Schnitt $\bigcap_{i\in I} H_i$ einer nicht-leeren Familie H_i, $i \in I$, von Untergruppen von G ist stets eine Untergruppe von G.

(b) Sei $X \subseteq G$. Die von X *erzeugte Untergruppe* von G ist definiert als Schnitt aller Untergruppen, die X enthalten: $\langle X\rangle = \bigcap\{H \mid H \le G \text{ mit } X \subseteq H\}$.[1] Zeigen Sie:

$$\langle X\rangle = \left\{ y_1^{e_1} y_2^{e_2} \cdots y_r^{e_r} \mid r \in \mathbb{N}_0,\ \text{sowie } y_i \in X \text{ und } e_i \in \{1,-1\} \text{ für jedes } i \in \{1,\dots,r\} \right\}.$$

(c) Die Gruppe G heißt *endlich erzeugt*, falls es eine endliche Teilmenge $X \subseteq G$ mit $G = \langle X\rangle$ gibt. Finden Sie für die folgenden Gruppen heraus, ob diese endlich erzeugt sind, und begründen Sie Ihre Antwort: (i) $\mathbb{Z}$ bzgl. $+$, (ii) $\mathbb{Q}$ bzgl. $+$, (iii) $\mathbb{R}_{>0}$ bzgl. $\cdot$.

Aufgabe 2.2 (8 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$, und betrachten Sie in $G = \mathrm{Sym}(n)$ die Permutationen

$$\pi = (1\ 2\ \dots\ n) \quad \text{und} \quad \tau = (1\ 2).$$

(a) Berechnen Sie (in der Zyklenschreibweise) die Elemente $\pi\tau$ und $\pi^{-1}\tau\pi$ von G.

(b) Zeigen Sie, dass $H = \{\sigma \in G \mid n\sigma = n\}$ eine Untergruppe von G ist.

(c) Zeigen Sie, per Induktion nach n, dass π und τ die Gruppe G erzeugen: $G = \langle \pi, \tau\rangle$.

Aufgabe 2.3

Bestimmen Sie jeweils alle Untergruppen der Gruppen (a) $\mathrm{Sym}(3)$, (b) V_4, (c) Q_8. Zeichnen Sie die entsprechenden Hassediagramme, in denen alle Inklusionen zwischen den Untergruppen angezeigt werden.

Aufgabe 2.4

Sei $\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{O} = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

der *Eisensteinschen ganzen Zahlen* als Unterring von $\mathbb{C}$ einen kommutativen Ring mit 1 bildet. Zeichnen Sie ein Bild von $\mathcal{O}$ in der komplexen Ebene. Ist $\mathcal{O}$ ein Divisionsring?

[1] Ist $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ endlich, wird üblicherweise $\langle x_1, \dots, x_m\rangle$ anstelle von $\langle\{x_1, \dots, x_m\}\rangle$ geschrieben.