Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2024

Algebra – Blatt 1

Abgabe der Lösungen bis zum 16.04.2024, 12:00 Uhr in dem dafür vorgesehenen Kasten

Bitte geben Sie Lösungen zu den ersten beiden Aufgaben ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Algebra_SS24/`.

Aufgabe 1.1 (8 Punkte)

Eine *affine Transformation* der reellen Geraden $\mathbb{R}$ in sich ist eine Abbildung der Form

$$T_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b, \qquad \text{wobei } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0 \text{ sind.}$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Aff}(1,\mathbb{R}) = \{T_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ unter Hintereinanderausführung eine Gruppe bildet. Ist die sogenannte *affine Gruppe* $\mathrm{Aff}(1,\mathbb{R})$ abelsch?

Aufgabe 1.2 (8 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Das Inverse von g wird bekanntlich mit g^{-1} bezeichnet. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Formal wird die m-te Potenz g^m von g rekursiv wie folgt definiert:[1]

$$g^0 := 1; \qquad g^m := gg^{m-1} \text{ für } m > 0; \qquad g^m := (g^{-1})^{(-m)} \text{ für } m < 0.$$

Zeigen Sie (möglichst vollständig) per Induktion, dass gilt:

$$g^m g^n = g^{m+n} \qquad \text{für alle } g \in G \text{ und } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 1.3

Betrachten Sie die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ von endlichem Grad $n \geq 1$. Eine *Transposition* ist eine Permutation, die in der Zyklenschreibweise die Form $(i\ j)$ mit $i \neq j$ hat.

(a) Leiten Sie eine allgemein gültige Formel für das Produkt eines einzelnen Zyklus $(i_1\ i_2\ \dots\ i_r)$ der Länge r und einer Transposition $(i_r\ j)$ her, wobei die Einträge $i_1, \dots, i_r, j$ paarweise verschieden seien.

(b) Zeigen Sie per Induktion, dass sich jeder Zyklus der Länge $r \geq 1$ als Produkt von $r-1$ Transpositionen schreiben lässt.

(c) Folgern Sie, unter Verwendung der Zyklenschreibweise, dass sich jede Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ als Produkt von höchstens $n-1$ Transpositionen schreiben lässt.

Aufgabe 1.4

Auf einer einsamen Insel sammeln fünf Schiffbrüchige und ein Affe einen ganzen Tag lang Kokosnüsse; dann schlafen sie ein. Als der erste Mann aufwacht, nimmt er sich seinen Anteil: Er teilt die Nüsse gerecht in fünf, bis auf eine Nuss, die dabei übrig bleibt, und nimmt sich seinen Teil. Die einzelne Nuss gibt er dem Affen und legt sich wieder schlafen. Später erwacht der zweite Mann. Auch er teilt die noch vorhandenen Nüsse gleichmäßig in fünf, bis auf eine Nuss, die übrig bleibt, nimmt seinen Anteil und überlässt dem Affen die einzelne Nuss. Nachdem auch er wieder eingeschlafen ist, verfahren die übrigen drei Männer nacheinander ebenso. Am Ende ist keiner der sechs Gefährten dabei leer ausgegangen. Wieviele Nüsse hatten sie anfangs (mindestens) eingesammelt?

[1] Für $m = -1$ bestätigt sich dabei implizit die suggestive Schreibweise g^{-1} für das Inverse.