Probeklausur Algebra Lösungsvorschlag

A1 Nein: Ist $a^2=a$, so folgt $\underbrace{a^2\cdot a^{-1}}_{=a} = \underbrace{a\cdot a^{-1}}_{=1}$, d.h. $a=1$.

A2 (a) $H=\{(a,a) \mid a\in\mathbb{Z}\}$ ist eine solche Untergruppe.

Da $(1,1)\in H$ ist würde aus $H=m\mathbb{Z}\times n\mathbb{Z}$ schon $m=n=1$, d.h. $H=\mathbb{Z}^2$ folgen. Aber etwa $(0,1)\notin H$, also $H\neq\mathbb{Z}^2$.

(b) $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2,\quad (a,b)\mapsto(a+b,\,a-b)$ oder

$g:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2,\quad (a,b)\mapsto(a,\,a-b)$ sind z.B. solche Automorphismen. Beides sind offensichtlich Homomorphismen, sie sind injektiv da $\ker(f)=\{(a,b)\mid \underbrace{a+b=0=a-b}_{\Rightarrow\, a=b=0}\}$

$\ker(g)=\{(a,b)\mid \underbrace{a=0=a-b}_{\Rightarrow\, b=0}\}=\{0\}$ gilt.

Außerdem ist wie gewünscht $f(H)=\{(a+a,\,a-a)\mid a\in\mathbb{Z}\}$
$=2\mathbb{Z}\times 0\mathbb{Z}$ und $g(H)=\{(a,\,a-a)\mid a\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}\times 0\cdot\mathbb{Z}$.

(**Bem:** Es genügt natürlich, einen Automorphismus anzugeben.

Bem 2: $H=\{(a,2a)\mid a\in\mathbb{Z}\}$ wäre ein anderes Bsp. in (a).)

A3 z.B. $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&4\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

oder etwa

$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$

oder… (es gibt noch mehr Möglichkeiten. immer ist $\prod d_i\in\{\pm 6\}$.)

A4 Sei G eine Gruppe mit $\#G = 91 = 7 \cdot 13$. Sei s_p die Zahl der p-Sylow-Ugr. für $p \in \{7, 13\}$. Dann ist

$s_7 \equiv 1 \pmod 7$ und $s_7 \mid 13$, also $s_7 = 1$ (da $13 \not\equiv 1 \pmod 7$)

und $s_{13} \equiv 1 \pmod{13}$ und $s_{13} \mid 7$, also $s_{13} = 1$.

Sei P die einzige 7-Sylow-Ugr. und Q die einzige 13-Sylow-Ugr. von G.

(Dann haben die sechs Elemente von $P \setminus \{1\}$ alle Ordnung 7 und die zwölf Elemente von $Q \setminus \{1\}$ alle Ordnung 13.) Jedes Element von $G \setminus \{1\}$ hat Ordnung 7 oder 13 oder 91 und <u>alle</u> Elemente von Ordnung 7 müssen in P liegen; <u>alle</u> Elemente von Ordnung 13 in Q. Es bleiben $\#G - (\#P - 1) - (\#Q - 1) - 1 = \underbrace{91 - 7 - 13 - 1}_{>0}$ Elemente der Ordnung 91; insbesondere <u>gibt</u> es ein Element $g \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) = 91$.

Für dieses ist $G = \langle g \rangle$ d.h. G ist zyklisch und insbesondere abelsch.

$\boxed{A5}$ Etwa $R = \mathbb{Z}$ mit $I_1 = 2\mathbb{Z}$ und $I_2 = 3\mathbb{Z}$.

Dann ist $2 \in 2\mathbb{Z}$, $3 \in 3\mathbb{Z}$, aber $2+3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$,

also ist $I_1 \cup I_2$ kein Ideal.

Anderes Bspl $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $I_1 = \{0\} \times \mathbb{Z}$, $I_2 = \mathbb{Z} \times \{0\}$.

I_1, I_2 sind offensichtlich Ideale, aber $\underset{I_1}{\underset{\wedge}{(0,1)}} + \underset{I_2}{\underset{\wedge}{(1,0)}} \notin I_1 \cup I_2$

$\boxed{A6}$ Sei $f : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}$ ein Ringhomomorphismus.

Es ist $f|_{\mathbb{Z}}$ die Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $a \longmapsto a$. Sei nun

$f(X) = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Dann ist

$$f(\underbrace{nX - m}_{\neq 0 \text{ da } n \neq 0}) \underset{\substack{f \text{ ist} \\ \text{Ringhom.}}}{=} f(n) \cdot f(X) - f(m) \underset{\substack{f|_{\mathbb{Z}} \text{ ist} \\ \text{Inklusion}}}{=} n \cdot \underbrace{f(X)}_{= \frac{m}{n}} - m = \underset{= f(0)}{0},$$

also ist $f(\underbrace{nX-m}_{\neq 0}) = f(0)$, d.h. f ist nicht injektiv.

$\boxed{A7}$ Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ normiert, $a \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle.

Dann ist $f(X) = (X-a) \cdot g(X)$ für ein $g \in \mathbb{Q}[X]$.

Da f normiert ist muss dabei auch g normiert sein.

Nun gibt es ein $b \in \mathbb{Q}^\times$ mit $b(X-a)$, $b^{-1} \cdot g \in \mathbb{Z}[X]$,

d.h. insbesondere $b \in \mathbb{Z}$ und $b^{-1} \in \mathbb{Z}$ (da $X-a$ und g normiert). Also schon $b = 1$, d.h. $(X-a) \in \mathbb{Z}[X]$ und damit $a \in \mathbb{Z}$.

A8 (a) Nach Eisenstein für $p=2$, denn $2 \mid 6$, $2 \mid 2$, $2 \nmid 1$, $2^2 \nmid 6$.

(b) <u>Ja</u>: $0 = f(a) = a^3 + 2a + 6$, also (nach Multipl. mit a)

auch $0 = a^4 + 2a^2 + 6a$, d.h.

$$a^4 = -6a - 2a^2$$

(Also $b_0 = 0$, $b_1 = -6$, $b_2 = -2$)

(c) Ein solches Polynom ist $g(X) = f(X) : (X-a)$.

Polynomdivision ergibt $g(X) = X^2 + aX + (2 + a^2)$

⌈ <u>Probe</u>: $(X-a) \cdot g(X) = X^3 + 2X - \underbrace{(a^3+2a)}_{\substack{= -6a,\ \text{da} \\ a^3+2a+6 = f(a) = 0}} = f(X)$. ⌋

A9 Die Aussage stimmt. <u>Denn</u>: $L \cap L'$ ist ein Unterkörper von L und von L' sowie ein Oberkörper von K.

D.h. $6 = [L:K] = [L : L \cap L'] \cdot [L \cap L' : K]$, also ist
$7 = [L':K] = [L' : L \cap L'] \cdot [L \cap L' : K]$

$[L \cap L' : K]$ ein Teiler von 6 und von 7, d.h. $[L \cap L' : K] = 1$, also $L \cap L' = K$.

A10 (a) Da $[L:K] < \infty$ gibt es $a_1, \dots, a_n \in L$ (etwa Basis von L als K-VR) mit $L = K(a_1, \dots, a_n)$.

Setze $f(X) := \mathrm{MiPo}_{a_1/K}(X) \cdot \dots \cdot \mathrm{MiPo}_{a_n/K}(X) \in K[X]$.

Dann ist der Zerfällungskörper M von f eine normale Körpererweiterung über K mit $[M:K] < \infty$.

(b) Für M/K (separabel, da char $K = 0$. Also galoissch): Gal (M/K) ist endlich und hat daher nur endl. viele Ugn. Daher hat M/K nur endl. viele Zwischenkörper (nach dem Hauptsatz der Galoistheorie). Für L/K: Jeder Zw.körper $L \supseteq F \supseteq K$ ist auch ein Zwischenkörper von M/K; davon gibt es nur endlich viele.