Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2022
04.10.2022

Schriftliche Prüfung zu Algebra
(PO 2014: Zweite Klausur / PO 2008: Nachklausur)

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN-A4-Blatt erlaubt. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Taschenrechner, Telefone oder Bücher sind nicht gestattet. Bitte lassen Sie dergleichen in Ihrer Tasche, und schalten Sie elektronische Geräte aus.

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig.

Schreiben Sie bitte leserlich und verwenden Sie keinen Bleistift. Wenn Sie Nebenrechnungen machen, die nicht korrigiert werden sollen, machen Sie dies bitte kenntlich (z. B. indem Sie sie durchstreichen).

Alle Antworten sind zu begründen (wenn nicht anders angegeben). Wenn nach Definitionen gefragt wird, dürfen Sie andere Begriffe verwenden ohne diese zu definieren (wenn nicht anders angegeben).

Sie dürfen bei Begründungen und Beweisen Resultate aus der Vorlesung verwenden (wenn nicht anders angegeben).

Füllen Sie dieses Deckblatt erst auf Aufforderung aus.
Lassen Sie die Klausur bis dahin geschlossen liegen.

Wenn Sie zum Ausfüllen aufgefordert werden: Schreiben Sie bitte DEUTLICH LESBAR in Druckbuchstaben.

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikel-Nr: ______________ Studienfach: ______________________ Fachsemester: ______

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

- ☐ die Zulassung im SS 22 erworben habe
- ☐ (für Mathematiker inkl. Finanzmathematik:) an einer schriftlichen Prüfung zu Algebra bei

  ______________ im WS / SS ______ teilgenommen, aber nicht bestanden habe.

- ☐ (für andere Fächer:) die Zulassung zur Prüfung im WS / SS ______ erworben habe.

____
Unterschrift

Hiermit bestätige ich, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Aufgabe 1 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Definieren Sie, was es für eine Gruppe $(G, \cdot)$ bedeutet abelsch zu sein.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ abelsch ist. (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass es eine Gruppe ist.)

(c) Sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass jedes Element von G mit Ausnahme des neutralen Elementes die Ordnung 2 hat. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine abelsche Gruppe an, in der für jede positive ganze Zahl n ein Element der Ordnung n existiert.

Aufgabe 2 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Sei G eine endliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und p eine Primzahl, welche die Ordnung von G teilt. Definieren Sie, was es bedeutet, dass H eine Sylow-p-Untergruppe von G ist.

(b) Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Geben Sie für alle Primzahlen, welche die Ordnung von G teilen, eine Sylow-p-Untergruppe von G an. (Sie müssen nicht nachweisen, dass Ihre Beispiele tatsächlich Untergruppen von G sind.)

(c) Wie viele Sylow-3-Untergruppen kann eine Gruppe der Ordnung 60 nach den Sylow-Sätzen haben?

(d) Seien G und H endliche Gruppen und sei p eine Primzahl, die sowohl die Ordnung von G als auch die Ordnung von H teilt. Zeigen Sie, dass die Sylow-p-Untergruppen von $G \times H$ genau die Gruppen der Form $P \times Q$ sind, wobei P eine Sylow-p-Untergruppe von G und Q eine Sylow-p-Untergruppe von H ist.
Hinweis: Es kann nützlich sein zu verwenden, dass (nach dem 2. Sylowsatz) alle Sylow-p-Untergruppen von $G \times H$ konjugiert zueinander sind.

Aufgabe 3 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Formulieren Sie das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium für Polynome vom Grad 4 in $\mathbb{Z}[x]$.

(b) Ist $f = 3x^4 + 30x^3 + 30x + 60 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel?

(c) Ist obiges f auch irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$? Falls nicht, schreiben Sie f als Produkt von irreduziblen Elementen.

(d) Sei $R \subseteq \mathbb{C}[x]$ der Unterring der komplexen Polynome ohne linearen Term, also der Unterring der Polynome $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ mit $a_1 = 0$. Zeigen Sie, dass R kein faktorieller Ring ist.
Hinweis: Schauen Sie sich z. B. eine geeignete Potenz von x an.

Aufgabe 4 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Was bedeutet es, dass ein Körper E aus K dadurch entsteht, dass man ein Element $a \in L$ zu K dazu adjungiert?

(b) Lässt sich jedes Element von $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ eindeutig in der Form $a + \zeta_3 b$ für $a, b \in \mathbb{Q}$ schreiben?
Zur Erinnerung: $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$ ist eine Nullstelle von $x^2 + x + 1$.

(c) Zeigen Sie, dass die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ gleich sind.

(d) Wir betrachten eine transzendente Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(a)$ und ein nicht-konstantes Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$. Zeigen Sie, dass der Unterkörper $E = \mathbb{Q}(f(a))$ von $\mathbb{Q}(a)$ eine transzendente Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.
Hinweis: Sei $K \subseteq L$ eine beliebige Körpererweiterung und sei $f \in K[x]$ ein Polynom mit $f(b) \in K$ für ein $b \in L$. Können Sie ein Polynom $g \in K[x]$ mit $g(b) = 0$ finden?

Aufgabe 5 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Definieren Sie, wann man diese Körpererweiterung normal nennt.

(b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{3})$ normal ist.

(c) Ist auch die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt[4]{3})$ normal?

(d) Zeigen Sie, dass ein Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ existiert, der sich nicht zu einem Automorphismus der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ fortsetzen lässt.