Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2022
xx.xx.2022

Lösungsvorschlag zur

Probeklausur zur Algebra

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN-A4-Blatt erlaubt. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Taschenrechner, Telefone oder Bücher sind nicht gestattet.

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig.

Schreiben Sie bitte leserlich und verwenden Sie keinen Bleistift. Wenn Sie Nebenrechnungen machen, die nicht korrigiert werden sollen, machen Sie dies bitte kenntlich (z. B. indem Sie sie durchstreichen).

Wenn der Platz für die Lösung einer Aufgabe nicht ausreicht, können Sie auf der Rückseite und auf dem leeren Papier am Ende des Klausurbogens weiterschreiben; machen Sie dann deutlich, was zu welcher Aufgabe gehört. (Sie können die Rückseiten und das leere Papier natürlich auch als Schmierpapier verwenden.)

Alle Antworten sind zu begründen (wenn nicht anders angegeben). Sie dürfen bei Begründungen und Beweisen Resultate aus der Vorlesung verwenden (wenn nicht anders angegeben).

Aufgabe 1 (1+2+3+4 Punkte):

(i) Wie lautet der Satz von Lagrange (aus der Gruppentheorie)?

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Lagrange den Index der Untergruppe $\langle(1\,2)\rangle$ von S_3.

! s.u. (iii) Sei G eine Gruppe und seien H und K Untergruppen von G mit $K \subseteq H$. Rechnen Sie nach, dass die Gleichung $[G\colon K] = [G\colon H][H\colon K]$ erfüllt ist.

(iv) Folgern Sie den Satz von Lagrange aus der Bahnenformel für eine geeignete Gruppenwirkung.

Zur Erinnerung: Ist G eine endliche Gruppe welche auf einer endlichen Menge X wirkt und sind $Gx_1, \ldots, Gx_r$ die Bahnen dieser Gruppenwirkung, so sagt die Bahnenformel, dass

$$|X| = \sum_{i=1}^{r} |Gx_i| = \sum_{i=1}^{r} [G\colon \mathrm{Stab}_G(x_i)]$$

ist.

(i)
Ist G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G, so gilt
$|G| = |H|[G:H]$.

(ii)
$\langle(12)\rangle = \{(12)^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \overset{(12)^2 = id}{=} \{id, (12)\}$. Daher

$$[S_3 : \langle(12)\rangle] \overset{\text{Lagr.}}{=} \frac{|S_3|}{|\langle(12)\rangle|} = \frac{3!}{2} = 3.$$

(iii)

$$[G:K] \overset{\text{Lagr.}}{=} \frac{|G|}{|K|} \overset{\text{Lagr.}}{=} \frac{|G|}{\frac{|H|}{[H:K]}} = \frac{|G|}{|H|}[H:K] \overset{\text{Lagr.}}{=} [G:H][H:K].$$

⚠ (iii) war geplant als "... mit Lagrange"

ohne Lagrange geht es kürzer

$$[G:K] = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|G||H|}{|K||H|} = [G:H][H:K]$$

(iv)
Betrachte Rechtsmultiplikation $H \curvearrowright G$. Dann

$$|G| \overset{\text{Bahnen-formel}}{=} \sum_{i=1}^{r} \underbrace{|H \cdot g_i|}_{=|g_iH|} = \sum_{i=1}^{[G:H]} |g_iH| = \sum_{i=1}^{[G:H]} |H| = |H|[G:H].$$

g_iH: Nebenklasse
$\rightarrow r = [G:H]$ = Anzahl der Nebenklassen

$$H \underset{\cdot g_i^{-1}}{\overset{\cdot g_i}{\rightleftarrows}} g_iH$$

zueinander inverse Bijektionen

Aufgabe 2 (1+2+3+4 Punkte):

(i) Sei G eine Gruppe und sei X eine Menge. Unter welchen Bedingungen nennt man eine Abbildung $\lambda\colon G \times X \to X$ eine Gruppenwirkung?

(ii) Für welche $a, b \in \{1,2,3\}$ ist $\lambda\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ gegeben durch $\lambda_0 = \mathrm{id}_X$ und $\lambda_1(1) = 2$, $\lambda_1(2) = a$ und $\lambda_1(3) = b$ eine Gruppenwirkung?

(iii) Wir betrachten die übliche Permutationswirkung von S_n auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Zu welcher Ihnen bekannten Gruppe ist die Stabilisatoruntergruppe eines festen Elementes $k \in \{1, \ldots, n\}$ isomorph?

(iv) Seien $\lambda\colon G \times X \to X$ und $\mu\colon G \times Y \to Y$ Gruppenwirkungen, wobei μ transitiv ist. Sei zudem $f\colon X \to Y$ eine Abbildung mit $f(\lambda_g(x)) = \mu_g(f(x))$ für alle $g \in G$ und $x \in X$. Zeigen Sie, dass die Urbilder $f^{-1}(y)$ und $f^{-1}(y')$ für je zwei $y, y' \in Y$ die gleichen Kardinalitäten besitzen und folgern Sie, dass $|Y|$ ein Teiler von $|X|$ ist, falls X und Y endliche Mengen sind.

Zur Erinnerung: Eine Gruppenwirkung $G \times X \to X$ heißt transitiv, falls $Gx = X$ für jedes Element $x \in X$ ist.

(i)

$\lambda_g(x) := \lambda(g,x)$. Bedingungen sind

- $\lambda_1(x) = x$ für alle $x \in X$
- $\lambda_{g \cdot g'}(x) = (\lambda_g \circ \lambda_{g'})(x)$ für alle $g, g' \in G$ und $x \in X$.

(ii)

$1 = \lambda_{\bar{0}}(1) = \lambda_{\bar{1}+\bar{1}}(1) = \lambda_{\bar{1}}(\lambda_{\bar{1}}(1)) = \lambda_{\bar{1}}(2) = a$

$3 = \lambda_{\bar{0}}(3) = \lambda_{\bar{1}+\bar{1}}(3) = \underbrace{\lambda_{\bar{1}}(\underbrace{\lambda_{\bar{1}}(3)}_{\text{falls } \neq 3\text{, so}})}_{\neq 3}$ $\rightsquigarrow$ $b = 3$

(iii)

$\mathrm{Stab}_{S_n}(\underset{\text{fix}}{k}) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k\} \cong S_{n-1}$

k fix, Rest kann beliebig permutiert werden

(iv)

μ transitiv $\rightsquigarrow$ $y' = gy$ für geeignetes $g \in G$. Daher sind

$f^{-1}(y) \underset{\cdot g^{-1}}{\overset{\cdot g}{\rightleftarrows}} f^{-1}(y')$

zueinander inverse Bijektionen ($x \in f^{-1}(y)$, d.h. $f(x) = y \rightsquigarrow f(gx) = gf(x) = g \cdot y$
$\rightsquigarrow gx \in f^{-1}(y')$. Zudem offenbar invers zueinander). Also $|f^{-1}(y)| = |f^{-1}(y')|$ für je
zwei $y, y' \in Y$. Somit

$|X| = |\dot{\bigcup}_{y \in Y} f^{-1}(y)| \overset{\text{disj.}}{\underset{\text{Ver.}}{=}} \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \underset{\text{alle gleich groß}}{=} |Y|\,|f^{-1}(y)|$,

sodass $|Y| \mid |X|$.

Aufgabe 3 (1+2+3+4 Punkte):

(i) Definieren Sie, was es für einen Ring bedeutet, nullteilerfrei zu sein.

(ii) Rechnen Sie nach, dass der Ring $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ nicht nullteilerfrei ist.

(iii) Sei R ein Ring, welcher nicht nullteilerfrei ist. Zeigen Sie, dass es keinen injektiven Ringhomomorphismus $R \to K$ geben kann, wobei K ein Körper ist.

(iv) Seien R und S zwei Ringe. Unter welchen Bedingungen an R und S ist das Produkt $R \times S$ nullteilerfrei?

(i)

Ein Ring R ist nullteilerfrei, falls

- $R \neq 0$
- Sind $a,b \in R\setminus\{0\}$, so auch $ab \in R\setminus\{0\}$.

(ii)

$\overline{x} \neq 0$ in $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$, aber $\overline{x}^2 = \overline{x^2} = \overline{0} \in \mathbb{Z}[x]/(x^2)$

(iii)

Gäbe es einen solchen Ringhomomorphismus $\varphi: R \hookrightarrow K$, so wäre $R \cong \mathrm{im}(\varphi)$ nach dem Isomorphiesatz. Aber $\mathrm{im}(\varphi)$ ist als Unterring eines Körpers nullteilerfrei. $\lightning$

(iv)

Sind R und S beide nicht der Nullring, so ist $\underbrace{(1,0)}_{\neq(0,0)} \cdot \underbrace{(0,1)}_{\neq(0,0)} = (0,0) \in R\times S$.

Ist $R=0$, so ist $R\times S = 0\times S \cong S$, vermöge $0\times S \underset{(0,s)\mapsto s}{\overset{(0,s)\mapsfrom s}{\rightleftarrows}} S$. Also ist dann $R\times S = 0\times S$ nullteilerfrei genau dann, wenn S nullteilerfrei ist (insbesondere $S\neq 0$).

Analog für $S=0$ und R beliebig.

Somit ist $R\times S$ nullteilerfrei genau dann, wenn einer der beiden Ringe nullteilerfrei und der andere Ring der Nullring ist.

Aufgabe 4 (1+2+3+4 Punkte):

(i) Definieren Sie den Grad einer Körpererweiterung.

(ii) Welchen Grad hat die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$?

(iii) Sei L eine Körpererweiterung eines Körpers K mit Grad $[L\colon K] = p$ für eine Primzahl p. Sei zudem $a \in L \setminus K$. Zeigen Sie, dass $a^0, \dots, a^{p-1}$ eine K-Basis von L ist.

(iv) Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass ein Element $a \in L^\times$ algebraisch über K ist genau dann, wenn sich a^{-1} als K-Linearkombination von a-Potenzen schreiben lässt.

(i)

Ist $K \subset L$ eine Körpererweiterung, so ist L ein K-VR. Der Grad $[L:K]$ von $K \subset L$ ist nun $\dim_K(L)$.

(ii)

$\mathbb{Q}(i) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \rightsquigarrow 1, i$ ist $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(i)$ (oder $\underbrace{\deg(x^2+1)}_{=2} = [\mathbb{Q}(i):\mathbb{Q}]$).

(iii)

$K(a)$ ist Zwischenkörper von $K \subset L$. Nach Gradformel

$$[L:K(a)]\underbrace{[K(a):K]}_{\neq 1, \text{ da } a \notin K} = [L:K] = p,$$

also $[L:K(a)] = 1$ und somit $L = K(a)$. Daher ist $1, a, a^2, \dots, a^{p-1}$ eine K-Basis von L.

(iv)

„$\Rightarrow$": Ist $a \in L^\times$ alg., so ist $K \subset K(a)$ algebraisch. Nun ist $1, a, \dots, a^{\deg(a)-1}$ eine K-Basis von $K(a)$, sodass $a^{-1} \in K(a)$ eine K-Lin.komb von $1, a, \dots, a^{\deg(a)-1}$ ist.

„$\Leftarrow$": Ist $a^{-1} = \sum_{i \geq 0} \lambda_i a^i$ mit $\lambda_i \in K$ für alle $i \geq 0$ eine Linearkomb. (also eine endliche Summe), so ist $1 = \sum_{i \geq 0} \lambda_i a^{i+1}$ und somit $\underbrace{\left(\sum_{i \geq 0} \lambda_i a^{i+1}\right) - 1}_{\text{ist ein Polynom mit Koeff. in } K \text{ ausgewertet an } a} = 0$. Also ist a algebraisch.

Aufgabe 5 (1+2+3+4 Punkte):

(i) Geben Sie die zueinander inversen Abbildungen der Galois-Korrespondenz an.

(ii) Sei $K \subset L$ eine Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Wie viele echte Zwischenkörper besitzt die Körpererweiterung $K \subset L$?

(iii) Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und E unnd E' zwei Zwischenkörper, welche Galois-Erweiterungen von K sind. Zeigen Sie, dass dann auch $E \cap E'$ eine Galois-Erweiterung von K ist.

(iv) Sei K ein Körper und sei $f \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom mit Zerfällungskörper L. Angenommen, die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist abelsch. Zeigen Sie, dass $L = K(a)$ für jede Nullstelle a von f ist.

(i)

$K \subset L$ galoisch

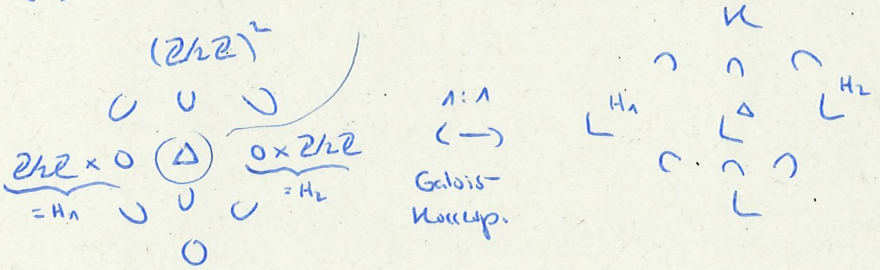
$$\{\text{Zwischenkörper } K \subset E \subset L\} \rightleftarrows \{\text{Untergruppen } H \subset \mathrm{Gal}(L/K)\}$$

$E \mapsto \mathrm{Aut}(L/E)$

$L^H \mapsfrom H$

(ii)

$\Delta = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ Diagonale



Also drei echte Zwischenkörper.

(iii)

Normalität von $K \subset E \cap E'$: Blatt 12 Aufg. 3

Separabilität — " — : Minimalpolynome von Elementen aus $E \cap E'$ stimmen mit Minimalpolynome dieser Elemente bzgl. $K \subset E$ bzw. $K \subset E'$ überein. Haben diese also keine mehrfachen Nullstellen, so auch keine Minimalpolynome von Elementen aus $E \cap E'$.

(iv)

$\mathrm{Gal}(L/K)$ abelsch $\rightsquigarrow$ alle Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/K)$ normal $\overset{\text{Galois-Korresp.}}{\rightsquigarrow}$ alle Zwischenkörper von $K \subset L$ normal. Insbes. also $K \subset K(a) \subset L$. Aber f ist bis auf Einheit das Minimalpolynom von a, muss daher über $K(a)$ zerfallen. Somit $L = K(a)$.