Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2022
~~27.09.2022~~ 04.10.

Schriftliche Prüfung zu Algebra – Aufgaben

(PO 2014: Zweite Klausur / PO 2008: Nachklausur)

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN-A4-Blatt erlaubt. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Taschenrechner, Telefone oder Bücher sind nicht gestattet. Bitte lassen Sie dergleichen in Ihrer Tasche, und schalten Sie elektronische Geräte aus.

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig.

Schreiben Sie bitte leserlich und verwenden Sie keinen Bleistift. Wenn Sie Nebenrechnungen machen, die nicht korrigiert werden sollen, machen Sie dies bitte kenntlich (z. B. indem Sie sie durchstreichen).

Alle Antworten sind zu begründen (wenn nicht anders angegeben). Wenn nach Definitionen gefragt wird, dürfen Sie andere Begriffe verwenden ohne diese zu definieren (wenn nicht anders angegeben).

Sie dürfen bei Begründungen und Beweisen Resultate aus der Vorlesung verwenden (wenn nicht anders angegeben).

Füllen Sie dieses Deckblatt erst auf Aufforderung aus.
Lassen Sie die Klausur bis dahin geschlossen liegen.

Wenn Sie zum Ausfüllen aufgefordert werden: Schreiben Sie bitte DEUTLICH LESBAR in Druckbuchstaben.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikel-Nr: ______________ Studienfach: ______________ Fachsemester: ______

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

- ☐ die Zulassung im SS 22 erworben habe
- ☐ (für Mathematiker inkl. Finanzmathematik:) an einer schriftlichen Prüfung zu Algebra bei

  ____________________ im WS / SS ________ teilgenommen, aber nicht bestanden habe.

- ☐ (für andere Fächer:) die Zulassung zur Prüfung im WS / SS ________ erworben habe.

____
Unterschrift

Hiermit bestätige ich, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Aufgabe 1 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Definieren Sie, was es für eine Gruppe $(G, \cdot)$ bedeutet abelsch zu sein.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ abelsch ist. (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass es eine Gruppe ist.)

(c) Sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass jedes Element von G mit Ausnahme des neutralen Elementes die Ordnung 2 hat. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel für eine abelsche Gruppe an, in der für jede positive ganze Zahl n ein Element der Ordnung n existiert.

(a)

Eine Gruppe $(G, \cdot)$ ist abelsch, falls $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in G$ ist.

(b)

Die Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ hat folgende Verknüpfungstabelle:

$+$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$
$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$

Somit ist $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ abelsch.

(c)

Seien $a, b \in G$. Es ist

$$ab = (b^{-1}a^{-1})^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba,$$

Ordnung ≤ 2

sodass eine solche Gruppe abelsch [redacted] ist.

(d)

Wir betrachten die Gruppe $G = \prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Hier hat das Element

$(\bar{0}, -, \bar{0}, \underbrace{\bar{1}}_{n\text{-te Stelle}}, \bar{0}, -)$

die Ordnung n, da $\bar{1} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Ordnung n hat.

Aufgabe 2 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Sei G eine endliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und p eine Primzahl, welche die Ordnung von G teilt. Definieren Sie, was es bedeutet, dass H eine Sylow-p-Untergruppe von G ist.

(b) Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Geben Sie für alle Primzahlen, welche die Ordnung von G teilen, eine Sylow-p-Untergruppe von G an. (Sie müssen nicht nachweisen, dass Ihre Beispiele tatsächlich Untergruppen von G sind.)

(c) Wie viele Sylow-3-Untergruppen kann eine Gruppe der Ordnung 60 nach den Sylow-Sätzen haben?

(d) Seien G und H endliche Gruppen und sei p eine Primzahl, die sowohl die Ordnung von G als auch die Ordnung von H teilt. Zeigen Sie, dass die Sylow-p-Untergruppen von $G \times H$ genau die Gruppen der Form $P \times Q$ sind, wobei P eine Sylow-p-Untergruppe von G und Q eine Sylow-p-Untergruppe von H ist.
Hinweis: Es kann nützlich sein zu verwenden, dass (nach dem 2. Sylowsatz) alle Sylow-p-Untergruppen von $G \times H$ konjugiert zueinander sind.

(a)

Schreibe $|G| = p^r \cdot m$, wobei p kein Teiler von m ist.

Man nennt H eine Sylow-p-Untergruppe von G, falls $|H| = p^r$ ist.

(b)

$|G| = 6 = 2 \cdot 3.$

Somit ist

$H_2 = 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{3}\} = \langle \bar{3} \rangle$

eine Sylow-2-Untergruppe und

$H_3 = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \langle \bar{2} \rangle$

eine Sylow-3-Untergruppe von G.

(c)

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Nach den ditten Sylow-Satz ist nun

$s_3 \equiv 1 \mod 3$

und s_3 teilt $2^2 \cdot 5$. Somit gibt es die Möglichkeiten $s_3 = 1$, $s_3 = 4$

und $s_3 = 10$.

(d)

Sei P eine Sylow-p-Untergruppe von G und sei Q eine Sylow-p-Untergruppe von H. Dann ist auch $P \times Q$ eine Sylow-p-Untergruppe von $G \times H$. Nach dem zweiten Sylow-Satz sind alle Sylow-p-Untergruppen von $G \times H$ konjugiert zueinander. Ist also $K \subset G \times H$ eine Sylow-p-Untergruppe, so existiert $(g,h) \in G \times H$ mit

$$K = (g,h)\, P \times Q\, (g,h)^{-1} = gPg^{-1} \times hQh^{-1}.$$

Da Konjugationen bijektiv sind, sind nun auch gPg^{-1} und hQh^{-1} Sylow-p-Untergruppen von G bzw. H und somit ist K von der gewünschten Form.

Aufgabe 3 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Formulieren Sie das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium für Polynome vom Grad 4 in $\mathbb{Z}[x]$.

(b) Ist $f = 3x^4 + 30x^3 + 30x + 60 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel?

(c) Ist obiges f auch irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$? Falls nicht, schreiben Sie f als Produkt von irreduziblen Elementen.

(d) Sei $R \subseteq \mathbb{C}[x]$ der Unterring der komplexen Polynome ohne linearen Term, also der Unterring der Polynome $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ mit $a_1 = 0$. Zeigen Sie, dass R kein faktorieller Ring ist.
Hinweis: Schauen Sie sich z. B. eine geeignete Potenz von x an.

(a)

Ein Polynom $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}(x)$ ist irreduzibel als Element von $\mathbb{Q}(x)$, falls eine Primzahl p mit den Eigenschaften

- $p \mid a_0, a_1, a_2, a_3$
- $p \nmid a_4$
- $p^2 \nmid a_0$

existiert.

(b)

Ja, denn für $p = 5$ sind obige Eigenschaften erfüllt, sodass f nach Eisenstein ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Q}(x)$ ist.

(c)

Nein, denn es ist

$$f = \underbrace{3}_{\text{irreduzibel, da Primzahl (nach Gradformel)}} \cdot \underbrace{(x^4 + 10x^3 + 10x + 20)}_{\text{irreduzibel in } \mathbb{Q}(x) \text{ nach Eisenstein wie oben, aber zusätzlich primitiv, da } a_4 = 1. \text{ Somit auch irreduzibel in } \mathbb{Z}(x)} \in \mathbb{Z}(x).$$

(d)

Es ist $x^6 = (x^2)^3 = (x^3)^2 \in R$. Da R keine Polynome von Grad 1 enthält, können in Zerlegungen von x^2 bzw. x^3 nur Polynome von Graden 0 und 2 bzw. 0 und 3 auftauchen. Somit sind x^2 und x^3 nicht der Gradformel irreduzibel. Es bleibt zu zeigen, dass sie nicht assoziiert zueinander sind. Dies ist der Fall, da jede Einheit in R auch eine Einheit in $\mathbb{C}(x)$ ist und alle Einheiten von $\mathbb{C}(x)$, also die Menge $\mathbb{C}(x)^\times = \mathbb{C}^\times$, in R enthalten sind. Somit können Einheiten den Grad nicht verändern, sodass x^2 und x^3 nicht assoziiert sein können.

Aufgabe 4 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Was bedeutet es, dass ein Körper E aus K dadurch entsteht, dass man ein Element $a \in L$ zu K dazu adjungiert?

(b) Lässt sich jedes Element von $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ eindeutig in der Form $a + \zeta_3 b$ für $a, b \in \mathbb{Q}$ schreiben? **Zur Erinnerung:** $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$ ist eine Nullstelle von $x^2 + x + 1$.

(c) Zeigen Sie, dass die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ gleich sind.

(d) Wir betrachten eine transzendente Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(a)$ und ein nicht-konstantes Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$. Zeigen Sie, dass der Unterkörper $E = \mathbb{Q}(f(a))$ von $\mathbb{Q}(a)$ eine transzendente Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist. **Hinweis:** Sei $K \subseteq L$ eine beliebige Körpererweiterung und sei $f \in K[x]$ ein Polynom mit $f(b) \in K$ für ein $b \in L$. Können Sie ein Polynom $g \in K[x]$ mit $g(b) = 0$ finden?

(a)

Es bedeutet, dass E der kleinste Unterkörper von L ist, welcher K und a enthält.

(b)

Ja, denn:

Das Polynom $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel, da es keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$ hat (ζ_3 und $\overline{\zeta_3}$ sind die beiden Nullstellen). Somit ist es das Minimalpolynom von ζ_3, sodass sich jedes Element von $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ eindeutig in der Form $a + \zeta_3 b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ schreiben lässt (denn $1, \zeta_3$ ist eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(\zeta_3)$).

(c)

Offenbar gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Bleibt die andere Inklusion zu zeigen.

Da $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$, ist $\sqrt{3}-\sqrt{2} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Daher ist auch $\sqrt{3} = \frac{1}{2}((\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ und somit auch $\sqrt{2} = (\sqrt{2}+\sqrt{3}) - \sqrt{3}$. Also gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

(d)

Da algebraisch zu sein transitiv ist, genügt es zu zeigen, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(f(a)) \subset \mathbb{Q}(a)$ algebraisch ist (denn dann muss $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(f(a))$ transitiv sein, da sonst auch $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a)$ algebraisch wäre). Das ist der Fall, da das Polynom $f - f(a) \in \mathbb{Q}(f(a))[x]$ sicherlich a als Nullstelle hat.

Aufgabe 5 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Definieren Sie, wann man diese Körpererweiterung normal nennt.

(b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{3})$ normal ist.

(c) Ist auch die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt[4]{3})$ normal?

(d) Zeigen Sie, dass ein Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ existiert, der sich nicht zu einem Automorphismus der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ fortsetzen lässt.

(a)

Eine endliche Körpererweiterung $K \subset L$ ist normal, falls L der Zerfällungskörper eines Polynomes $f \in K[x] \setminus \{0\}$ ist.

(b)

Da $\pm i \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, ist $\mathbb{Q}(i \cdot \sqrt{3})$ der Zerfällungskörper des Polynomes

$\underbrace{x^2 + 3}_{\text{hat Faktorisierung } (x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) \text{ über } \mathbb{Q}^{alg}} \in \mathbb{Q}[x]$. Somit ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ normal.

(c)

Nein, denn:

Die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{3})$ hat Grad 4, da $x^4 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ das Minimalpolynom von $i\sqrt[4]{3}$ über $\mathbb{Q}$ ist (es ist normiert, hat $i\sqrt[4]{3}$ als Nullstelle und ist nach Eisenstein mit $p = 3$ irreduzibel). Somit ist $1, i\sqrt[4]{3}, \underbrace{-\sqrt[2]{3}}_{= (i\sqrt[4]{3})^2}, \underbrace{-i \cdot 3^{\frac{3}{4}}}_{= (i\sqrt[4]{3})^3}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{3})$ und man sieht, dass $\pm\sqrt[4]{3}$ nicht in $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{3})$ enthalten sind. Da sich $x^4 - 3$ über $\mathbb{Q}^{alg}$ als

$(x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x - i\sqrt[4]{3})(x + i\sqrt[4]{3})$

zerlegen lässt, ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i\sqrt[4]{3})$ demnach nicht normal.

(d)

Wir betrachten den Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q})$, welcher die beiden Elemente $\pm\sqrt{3}$ vertauscht. Er bildet also ein Element $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ auf $a - b\sqrt{3}$ ab. Zu zeigen ist nun, dass es keinen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q})$ gibt, welcher $\pm\sqrt{3} = \pm(\sqrt[4]{3})^2$ vertauscht. Sei also $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q})$. Dann ist

$$\varphi(\sqrt{3}) = \varphi\left((\sqrt[4]{3})^2\right) \overset{\text{Autom.}}{=} \left(\varphi(\sqrt[4]{3})\right)^2 = (\pm\sqrt[4]{3})^2 = \sqrt{3}.$$

φ vertauscht als Element von $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q})$ Nullstellen vom Minimalpolynom $x^4 - 3$ von $\sqrt[4]{3}$ über $\mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ nicht $\pm i\sqrt[4]{3}$ enthält, kommen also nur $\pm\sqrt[4]{2}$ in Frage

Somit lässt sich σ nicht zu einem Automorphismus der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ fortsetzen.