Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2022
29.07.2022

Schriftliche Prüfung zu Algebra – Aufgaben
(PO 2014: Erste Klausur / PO 2008: Klausur)

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Als Hilfsmittel ist ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN-A4-Blatt erlaubt. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Taschenrechner, Telefone oder Bücher sind nicht gestattet. Bitte lassen Sie dergleichen in Ihrer Tasche, und schalten Sie elektronische Geräte aus.

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig.

Schreiben Sie bitte leserlich und verwenden Sie keinen Bleistift. Wenn Sie Nebenrechnungen machen, die nicht korrigiert werden sollen, machen Sie dies bitte kenntlich (z. B. indem Sie sie durchstreichen).

Alle Antworten sind zu begründen (wenn nicht anders angegeben). Wenn nach Definitionen gefragt wird, dürfen Sie andere Begriffe verwenden ohne diese zu definieren (wenn nicht anders angegeben).

Sie dürfen bei Begründungen und Beweisen Resultate aus der Vorlesung verwenden (wenn nicht anders angegeben).

Füllen Sie dieses Deckblatt erst auf Aufforderung aus.
Lassen Sie die Klausur bis dahin geschlossen liegen.

Wenn Sie zum Ausfüllen aufgefordert werden: Schreiben Sie bitte DEUTLICH LESBAR in Druckbuchstaben.

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikel-Nr: ______________ Studienfach: ______________ Fachsemester: ________

Hiermit bestätige ich, dass ich zu dieser schriftlichen Prüfung zugelassen bin, da ich

☐ die Zulassung im SS 22 erworben habe

☐ (für Mathematiker inkl. Finanzmathematik:) an einer schriftlichen Prüfung zu Algebra bei

______________ im WS / SS ________ teilgenommen, aber nicht bestanden habe.

☐ (für andere Fächer:) die Zulassung zur Prüfung im WS / SS ________ erworben habe.

____
Unterschrift

Hiermit bestätige ich, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin, eine Prüfung abzulegen.

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Aufgabe 1 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Definieren Sie, wann eine Gruppe G von $a_1, \dots, a_n \in G$ erzeugt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht-zyklische abelsche Gruppe der Ordnung 4 an.

(c) Ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

(d) Für welche nicht-negativen ganzen Zahlen n gibt es genau eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n?

bis auf Isomorphie

(a)

Eine Gruppe G wird von $a_1, \dots, a_n \in G$ erzeugt, falls $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = G$.

(b)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist ein solches Bsp.:

$|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 2$ und somit $|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 2^2 = 4$

und

$2(\bar{1},\bar{0}) = 2(\bar{1},\bar{1}) = 2(\bar{0},\bar{1}) = (\bar{0},\bar{0})$, sodass $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht zyklisch ist.

(c)

Ja, vermöge des chinesischen Restsatzes:

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \underset{\text{ggT}(2,3)=1}{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \underset{\text{ggT}(3,4)=1}{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(d)

$n = 0$: Kann keine Gruppe geben, da kein neutrales Element gegeben sein kann.

$n \geq 1$: Gibt stets mindestens eine solche Gruppe, nämlich $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sei nun $n = p_1^{v_1} \cdots p_r^{v_r}$ die Primfaktorzerlegung von n. Ist $v_i \geq 2$ für ein $1 \leq i \leq r$, so sind nach dem chinesischen Restsatz die beiden Gruppen

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/\frac{n}{p_i}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$

nicht isomorph. In diesem Fall haben wir also bereits mindestens zwei nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung n. Ist $v_i \leq 1$ für alle $1 \leq i \leq r$, so ist nach der Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen eine solche Gruppe bereits isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, da sich n nicht in ein Produkt nicht-teilerfremder Zahlen zerlegen lässt.

Aufgabe 2 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Definieren Sie, was die Zykelzerlegung eines Elements der symmetrischen Gruppe S_n ist.

(b) Sei $\sigma \in S_6$ gegeben durch

$$1 \mapsto 3, \qquad 2 \mapsto 5, \qquad 3 \mapsto 4, \qquad 4 \mapsto 1, \qquad 5 \mapsto 2, \qquad 6 \mapsto 6$$

Geben Sie die Zykelzerlegung von σ an.

(c) Sei $\sigma \in S_6$ ein Zykel der Länge k. Für welche k liegt σ in A_6?

(d) Sei $\sigma \in S_6$ und sei ℓ die Anzahl der Zykel in der Zykelzerlegung von σ. Wir nehmen an, dass σ keine Fixpunkte hat, d. h. dass kein $n \in \{1, \ldots, 6\}$ existiert mit $\sigma(n) = n$. Zeigen Sie, dass σ genau dann in A_6 enthalten ist, wenn ℓ gerade ist.

(a)

Die Zykelzerlegung von $\sigma \in S_n$ ist eine Zerlegung von σ in ein Produkt von Zykeln mit disjunkten Trägern.

bis auf Reihenfolge eindeutig

(b)

$$(1\ 3\ 4)(2\ 5) = (1\ 3\ 4)(2\ 5)(6)$$

(c)

Nach der Vorlesung ist ein Zykel der Länge k ein Produkt von $k-1$ Transpositionen. Somit ist

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\underbrace{\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{k-1}}_{\text{soeben erwähnte Transpositionen}}) \overset{\text{Grp.-hom.}}{=} \mathrm{sgn}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{sgn}(\tau_{k-1}) \overset{1.6.7}{=} (-1)^{k-1}$$

tatsächlich sogar vollständige Rechnung in 1.6.7 enthalten

genau dann 1, falls k ungerade ist. Somit ist $\sigma \in A_6$ genau dann, falls $k \in \{1, 3, 5\}$.

(d)

Per Definition liegt σ genau dann in A_6, falls $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ ist. Da σ keine Fixpunkte hat, korrespondiert die Zykelzerlegung von σ zu einer Partition der Zahl 6 in Zahlen größer oder gleich 2. Diese sind

$$\underbrace{6}_{\text{6-Zykel}} = \underbrace{4+2}_{\text{Typ I}} = \underbrace{3+3}_{\text{Typ II}} = \underbrace{2+2+2}_{\text{Typ III}}.$$

hier steht eine Zahl k für einen k-Zykel in der Zykelzerlegung

Typ I: $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^5(-1)^3 = 1$

Typ II: $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^4(-1)^4 = 1$

Typ III: $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^3(-1)^3(-1)^3 = -1$

(Somit ist $\sigma \in A_6$ genau dann, wenn ℓ gerade ist (Typen I und II).

$\wedge$

6-Zykel: $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^7 = -1$

Aufgabe 3 (1+2+3+4 Punkte):

(a) Sei $(R, +)$ eine abelsche Gruppe und sei $\cdot : R \times R \to R$ eine weitere Verknüfung, sodass
   (i) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
   (ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   (iii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
   für alle $a, b, c \in R$ erfüllt sind. Welche Bedingungen fehlen, damit R ein Ring ist? (In der gesamten Aufgabe sind Ringe immer kommutativ und mit 1.)

(b) Die Menge $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen (2×2)-Matrizen erfüllt (i)–(iii), was Sie nicht nachweisen müssen. Überprüfen Sie, welche der restlichen Bedingungen an einen Ring erfüllt sind.

(c) Sei R ein Ring und sei $a \in R$. Rechnen Sie nur unter Verwendung der Ringaxiome nach, dass $(-1) \cdot a = -a$ ist.

(d) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass die maximalen Ideale von $K[x]$ genau die Hauptideale der Form $(x - a)$ mit $a \in K$ sind.

(a)

Existenz von $1 \in R$: Es ex. $1 \in R$ mit $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ für alle $a \in R$

Kommutativität von "$\cdot$", $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$

(b)

Da $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{1_{\mathbb{R}^{2\times2}}}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ für alle $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, ex. $1 \in \mathbb{R}^{2\times2}$.

Kommutativität von "$\cdot$" ist nicht gegeben:

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

(c)

Es ist

$0 \overset{(*)}{=} 0 \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a$

und somit $-a = (-1) \cdot a$.

$(*)$: $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$, sodass $0 = 0 \cdot a$

(d)

Da K ein Körper ist, ist $K(x)$ ein Hauptidealring. Somit sind die maximalen Ideale in $K(x)$ genau die Hauptideale, welche von einem irreduziblen Polynom f erzeugt werden. Nun ist K algebraisch abgeschlossen und somit sind die irreduziblen Polynome in $K(x)$ genau die Polynome vom Grad 1. Nach $\underbrace{\text{normieren}}_{\text{andere Ideal nicht}}$ erhalten wir also genau die Ideale der Form $(x-a)$ mit $a \in K$ als maximale Ideale von $K(x)$.

Aufgabe 4 (1+2+3+4 Punkte):

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung.

(a) Sei F ein Zwischenkörper von $K \subseteq L$. In welchem Zusammenhang stehen die Grade $[L : K]$, $[L : F]$ und $[F : K]$?

(b) Seien F und F' Zwischenkörper von $K \subseteq L$ mit $[F : K] = 3$, $[L : F] = 6$ und $[L : F'] = 9$. Bestimmen Sie $[F' : K]$.

(c) Seien F und F' Zwischenkörper von $K \subseteq L$ so, dass $[F : K]$ und $[F' : K]$ teilerfremd sind. Zeigen Sie, dass $F \cap F' = K$ ist.

(d) Seien $a, b \in L$, sei $m = [K(a) : K]$ und sei $n = [K(b) : K]$. Zeigen Sie, dass, wenn m und n teilerfremd sind, der Grad $[K(a, b) : K]$ durch das Produkt mn gegeben ist.

(a)

Gradformel: $[L:K] = [L:F][F:K]$

(b)

$$\begin{tikzcd}
 & L & \\
F \arrow[ur, hook, "6"] & & F' \arrow[ul, hook', "9"'] \\
 & K \arrow[ul, hook, "3"] \arrow[ur, hook', "2?"'] &
\end{tikzcd}$$

Gradformel liefert also $6 \cdot 3 = 18 = [L:K] = 9[F':K]$ und somit $[F':K] = 2$.

(c)

Haben Inklusionen

$$\begin{tikzcd}
 & L & \\
F \arrow[ur, hook] & & F' \arrow[ul, hook'] \\
 & F \cap F' \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook'] & \\
 & K \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

Nach der Gradformel ist $[F \cap F' : K]$ nun ein Teiler von $[F:K]$ und von $[F':K]$. Also ist $[F \cap F' : K] = 1$, da $ggT([F:K], [F':K]) = 1$. Daher ist $F \cap F' = K$.

(d)

$$\begin{tikzcd}
 & K(a,b) & \\
K(a) \arrow[ur, hook] & & K(b) \arrow[ul, hook] \\
 & K \arrow[ul, hook, "m"] \arrow[ur, hook, "n"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach der Gradformel teilen also m und n den Grad $[K(a,b):K]$ und somit auch $\mathrm{kgV}(m,n) \underset{\mathrm{ggT}(a,b)=1}{=} mn$. Daher ist $[K(a,b):K] \geq mn$.

Da $\deg(a) = m$, ist der Grad $[K(a,b):K(b)] \leq m$ und somit auch

$[K(a,b):K] = \underbrace{[K(a,b):K(b)]}_{\leq m}\underbrace{[K(b):K]}_{= n} \leq mn$. Also $[K(a,b):K] = mn$.

Aufgabe 5 (1+2+3+4 Punkte):

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung mit Automorphismengruppe $G = \mathrm{Aut}(L/K)$.

(a) Definieren Sie den Fixkörper $\mathrm{Fix}(H)$ einer Untergruppe H von G.

(b) Wir betrachten nun $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$ und $H = \{\mathrm{id}, \sigma\} \subseteq G$, wobei $\sigma \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation ist. Bestimmen Sie $\mathrm{Fix}(H)$.

Von nun an sei $K \subseteq L$ endlich und galoissch.

(c) Sei p eine Primzahl, welche die Ordnung von G teilt. Seien zudem m und r positive ganze Zahlen so, dass $|G| = p^r \cdot m$ und m nicht durch p teilbar ist. Zeigen Sie, dass ein Zwischenkörper $K \subseteq F \subseteq L$ mit $[F : K] = m$ existiert.

(d) Seien H_1 und H_2 Untergruppen von G. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}(H_1 \cap H_2)$ der kleinste Unterkörper von L ist, welcher $\mathrm{Fix}(H_1)$ und $\mathrm{Fix}(H_2)$ enthält.

(a)

$\mathrm{Fix}(H) = \{a \in L \mid \sigma(a) = a$ für alle $\sigma \in H\}$

(b)

Die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ fixiert stets alles. Betrachten also $\sigma: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Die komplexe Zahl

$\sigma(x+iy) = x - iy$ ist genau dann $x+iy$, falls $y = 0$ und somit $x+iy \in \mathbb{R}$ ist. Also ist $\mathrm{Fix}(H) = \mathbb{R}$.

(c)

Nach den Sylow-Sätzen ex. eine Sylow-p-UG. $H_p \subset G$, also eine Untergruppe von Ordnung p^r. Die Galois-Korrespondenz liefert nun, dass $[L : \mathrm{Fix}(H_p)] = |H_p| = p^r$ ist, sodass nach der Gradformel $[\mathrm{Fix}(H_p) : K] = m$ sein muss.

(d)

Nach der Galois-Korrespondenz enthält $\mathrm{Fix}(H_1 \cap H_2)$ die beiden Körper $\mathrm{Fix}(H_1)$ und $\mathrm{Fix}(H_2)$ erstmal, da $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe von H_1 und H_2 ist. Gäbe es nun einen echt kleineren Unterkörper von L mit dieser Eigenschaft, so müsste dieser zu einer Untergruppe $\tilde{H}$ von H_1 und H_2 mit $H_1 \cap H_2 \subsetneq \tilde{H}$ korrespondieren. Das kann also nicht sein. Somit ist $\mathrm{Fix}(H_1 \cap H_2)$ der kleinste Unterkörper von L, welcher $\mathrm{Fix}(H_1)$ und $\mathrm{Fix}(H_2)$ enthält.

kann man natürlich auch elementar einsehen...

* größte UG., welche in H_1 und H_2 enthalten ist.