Aufgabe 1

(i) Ist i.A. kein Ringhomomorphismus:

Ist R ein Ring mit $1 \neq 0$ (also nicht isomorph zum Nullring), so ist α kein Ringhomomorphismus, da $0 \in \{0\}$ dafür sowohl auf $0 \in R$ und $1 \in R$ abgebildet werden müsste.

1-Element im Nullring ist 0

(ii) Ist stets ein Ringhomomorphismus:

Sind $a, b \in R$, so gelten

- $\beta(a+b) = 0 = 0 + 0 = \beta(a) + \beta(b)$
- $\beta(a \cdot b) = 0 = 0 \cdot 0 = \beta(a)\beta(b)$
- $\beta(1) = 0$

(iii) Ist i.A. kein Ringhomomorphismus:

Für $R = \mathbb{Z}$ ist z.B.

$-1 = \gamma(1) = \gamma(1 \cdot 1) \neq \gamma(1) \cdot \gamma(1) = (-1)(-1) = 1.$

(iv) Ist i.A. kein Ringhomomorphismus:

Für $R = \mathbb{Z}$ ist z.B.

$\delta(1) = 0 \neq 1.$

(v) Ist stets ein Ringhomomorphismus:

Sind $a, b \in R$, so gelten

- $\Delta(a+b) = (a+b, a+b) = (a,a) + (b,b)$
  $= \Delta(a) + \Delta(b)$
- $\Delta(ab) = (ab, ab) = (a,a) \cdot (b,b)$
  $= \Delta(a) \cdot \Delta(b)$
- $\Delta(1) = (1,1)$

Aufgabe 2

(i) Stimmt:

Sei K ein Körper. Wie jeder Ring besitzt K das Nullideal $(0) = \{0\}$. Sei nun $\mathfrak{a}$ ein Ideal von K, welches ein Element $a \neq 0$ enthält. Da K ein Körper ist, ist a eine Einheit und wir erhalten

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a^{-1} \cdot a) = \underbrace{(b \cdot a^{-1})}_{\in K} \cdot \underbrace{a}_{\in \mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$$

für jedes $b \in K$. Somit ist $\mathfrak{a}$ bereits der gesamte Körper.

(ii) Stimmt nicht:

Für jede Primzahl p ist die Quotientenabbildung

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$$

ein nicht-injektiver Ringhomomorphismus.

(iii) Stimmt:

Sei K ein Körper und sei R ein Ring mit $1 \neq 0$. Sei zudem

$$f : K \to R$$

ein Ringhomomorphismus. Vermöge des Isomorphiesatzes erhalten wir

$$K/\underbrace{\ker(f)}_{\left.\begin{array}{l} = (0) \\ \text{oder} \\ = K \end{array}\right\} \text{nach (i)}} \cong \operatorname{im}(f) \subset R.$$

Nun kann $\ker(f) = K$ nicht gelten, da dann

$$\operatorname{im}(f) \cong K/K \cong \{0\}$$

sein würde und somit f kein Ringhomomorphismus sein könnte ($1 \not\mapsto 1$). Also ist $\ker(f)$ das Nullideal und f somit injektiv.

(iv) Stimmt i.A. nicht:

Unter der Inklusion $\mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$ wird das maximale Ideal $2\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ auf sich selbst abgebildet, was in $\mathbb{Q}$ jedoch nicht einmal ein Ideal ist.

(v) Stimmt i.A. nicht:
Betrachten wir erneut $\mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$. Nun ist (0) in $\mathbb{Q}$ maximal, aber $i^{-1}((0)) = \{0\}$ nicht in $\mathbb{Z}$, da $\mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}],$$
$$f \mapsto f(\tfrac{1}{2})$$

welche ein Ringhomomorphismus ist (nachrechnen / analog zur Evaluationsabb. aus der Vorlesung / univ. Eigenschaft von Polynomringen aus LA II klappt auch für Polynomringe über $\mathbb{Z}$: "$\mathbb{Z}$-Algebra" = Ring).

Nun ist

$$\varphi(2x-1) = 2\cdot\tfrac{1}{2} - 1 = 0$$

und somit $(2x-1) \subset \ker(\varphi)$. Daher erhalten wir einen wohldefinierten Ringhomomorphismus

$$\bar{\varphi}: \mathbb{Z}[x]/(2x-1) \to \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}].$$

Wir definieren nun $\psi: \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \to \mathbb{Z}[x]/(2x-1)$ vermöge $\frac{m}{2^n} \mapsto \overline{mx^n}$.

ψ ist wohldefiniert:

Sind $\frac{m}{2^n}, \frac{m'}{2^{n'}} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ mit $\frac{m}{2^n} = \frac{m'}{2^{n'}}$, so ist

$2^{n'}m = 2^n m'$ und somit

$$\overline{2^{n'}m} = \psi(2^{n'}m) = \psi(2^n m') = \overline{2^n m'}.$$

Multiplikation mit $x^{n+n'}$ liefert nun

$$\underbrace{\overline{2^{n'}mx^{n+n'}}}_{=\overline{mx^n},\ \text{da } \overline{2x}=\overline{1}} = \underbrace{\overline{2^n m' x^{n+n'}}}_{=\overline{m'x^{n'}},\ \text{da } \overline{2x}=\overline{1}}$$

ψ ist Ringhomomorphismus:

Sind $\frac{m}{2^n}, \frac{m'}{2^{n'}} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, so gelten

- $$\psi\left(\frac{m}{2^n}+\frac{m'}{2^{n'}}\right) = \psi\left(\frac{2^{n'}m+2^n m'}{2^{n+n'}}\right)$$
  $$= \overline{(2^{n'}m+2^n m')x^{n+n'}}$$
  $$= \overline{2^{n'}mx^{n+n'}} + \overline{2^n m' x^{n+n'}}$$
  $\overline{2x}=\overline{1}$
  $$= \overline{mx^n} + \overline{m'x^{n'}}$$
  $$= \psi\left(\frac{m}{2^n}\right) + \psi\left(\frac{m'}{2^{n'}}\right)$$

- $\psi\left(\frac{m}{2^n}\cdot\frac{m'}{2^{n'}}\right) = \psi\left(\frac{mm'}{2^{n+n'}}\right) = \overline{mm'x^{n+n'}}$

$$= \overline{mx^n}\cdot\overline{m'x^{n'}}$$

$$= \psi\left(\frac{m}{2^n}\right)\cdot\psi\left(\frac{m'}{2^{n'}}\right)$$

- $\psi(1) = \overline{1}$

ψ ist die Inverse zu $\bar{\varphi}$:

Es ist

- $\psi\circ\varphi\left(\overline{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}\right) = \psi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)$

$$= \sum_{i=0}^{n}\psi\left(a_i\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)$$

$$= \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}$$

für alle [redacted] $\overline{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i} \in \mathbb{Z}[x]/(2x-1)$

- $\varphi\circ\psi\left(\frac{m}{2^n}\right) = \varphi\left(\overline{mx^n}\right) = m\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{m}{2^n}$

für alle $\frac{m}{2^n} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Somit sind $\mathbb{Z}[x]/(2x-1)$ und $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ isomorphe Ringe.

Aufgabe 4

Wir betrachten

$\mathfrak{b} = \{b \in R \mid \text{es ex. } s \in S \text{ mit } (b,s) \in \mathfrak{a}\}$

und

$\mathfrak{c} = \{c \in S \mid \text{es ex. } r \in R \text{ mit } (r,c) \in \mathfrak{a}\}$.

Diese Teilmengen sind Ideale:

Aus Symmetriegründen reicht es dies für $\mathfrak{b}$ zu zeigen.

- $0 \in \mathfrak{b}$, da $(0,0) \in \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ ist ein Ideal)
- Sind $b, b' \in \mathfrak{b}$, so auch $b - b' \in \mathfrak{b}$:

  Sind $b, b' \in \mathfrak{b}$, so ex. $s, s' \in S$ mit $(b,s), (b',s') \in \mathfrak{a}$. Somit ist auch $(b,s) - (b',s') = (b-b', \underbrace{s-s'}_{\in S}) \in \mathfrak{a}$ und somit $b - b' \in \mathfrak{b}$.
- Ist $b \in \mathfrak{b}$ und $r \in R$, so ist $rb \in \mathfrak{b}$:

  Ist $b \in \mathfrak{b}$, so ex. $s \in S$ mit $(b,s) \in \mathfrak{a}$. Daher ist auch $(r,1)(b,s) = (rb, s) \in \mathfrak{a}$ und somit $rb \in \mathfrak{b}$.

Nun zeigen wir, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ ist. Dabei ist die Inklusion $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ per Definition von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ klar.

Sei also $b \in \mathfrak{b}$ und $c \in \mathfrak{c}$. Wir zeigen, dass $(b,c) \in \mathfrak{a}$ ist.

Zunächst ex. $s \in S$ und $r \in R$ mit (b,s), $(r,c) \in \mathfrak{a}$. Wir erhalten nun

$$\underbrace{(1,c)}_{\in R\times S}\underbrace{(b,s)}_{\in \mathfrak{a}} = (b, cs) \in \mathfrak{a}$$

und

$$\underbrace{(1,s)}_{\in R\times S}\underbrace{(r,c)}_{\in \mathfrak{a}} = (r, cs) \in \mathfrak{a}$$

und somit

$(b-r, 0) = (b, cs) - (r, cs) \in \mathfrak{a}$. Das liefert uns nun

$$(b,c) = \underbrace{(r,c)}_{\in \mathfrak{a}} + \underbrace{(b-r,0)}_{\in \mathfrak{a}} \in \mathfrak{a},$$

was zu zeigen war.

Für Gruppen ist dies nicht der Fall:
Ist G eine nicht-triviale abelsche Gruppe, so ist $\Delta_G = \{(g,g) \mid g \in G\}$ eine nicht-triviale normale Untergruppe von $G \times G$. Diese kann man allerdings nicht als ein Produkt schreiben, da man mindestens zwei Elemente in den Faktoren haben müsste und somit auch Paare nicht-gleicher Elemente im Produkt auftreten würden.