Aufgabe 1

(i)

$G = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

$|G| = 15 = 3 \cdot 5$

Sylow-3-Untergruppe:

$\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\} = 5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

Sylow-5-Untergruppe:

$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\} = 3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

(ii)

$G = SL_2(\mathbb{F}_3)$

$|G| = \frac{(3^2-3)(3^2-1)}{3-1} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 = 2^3 \cdot 3$

Sylow-2-Untergruppe:

Nach dem Hinweis suchen wir alle Skalarmatrizen und alle spurlosen Matrizen in $SL_2(\mathbb{F}_3)$ und wissen, dass diese zusammen 8 Stück sein müssen.

Skalarmatrizen:

Über $\mathbb{F}_3$ gibt es genau drei Skalarmatrizen der $\underbrace{\text{Größe } 2\times 2}$, nämlich:

auch genau drei für jede andere Größe ...

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}}_{\det = \bar{0}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}}_{\det = \bar{1}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}}_{\det = \bar{2}^2 = \bar{4} = \bar{1}}$$

Es gibt also zwei Skalarmatrizen in $SL_2(\mathbb{F}_3)$.

Spurlose Matrizen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}}_{\det = -\bar{2} = \bar{1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}}_{\det = -\bar{2} = \bar{1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}}_{\det = \bar{2} - \bar{1} = \bar{1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}}_{\det = \bar{2} - \bar{1} = \bar{1}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}}_{\det = \bar{2} - \bar{4} = -\bar{2} = \bar{1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}}_{\det = \bar{2} - \bar{4} = -\bar{2} = \bar{1}}$$

Die gesuchte Sylow-2-Untergruppe ist also

$\left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \right.$

$\left. \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \right\}$

Sylow-3-Untergruppe:

$\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}}_{\det = \bar{1}} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$

(iii)

$G = A_6$

$|G| = \frac{6!}{2} = \frac{720}{2} = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Sylow-2-Untergruppe:

$\langle (1\,2\,3\,4)(5\,6), (1\,3)(5\,6) \rangle$

$\shortparallel$

$\{ id, (1\,3)(5\,6), (1\,2\,3\,4)(5\,6), (1\,3)(2\,4),$

$(4\,1\,2\,3)(5\,6), (1\,4)(2\,3), (1\,2)(3\,4)$

$(2\,4)(5\,6) \}$

Sylow-3-Untergruppe:

$\langle (1\,2\,3), (4\,5\,6) \rangle$

$\shortparallel$

$\{ id, (1\,2\,3), (1\,3\,2), (4\,5\,6), (1\,2\,3)(4\,5\,6),$

$(1\,3\,2)(4\,5\,6), (4\,6\,5), (1\,2\,3)(4\,6\,5),$

$(1\,3\,2)(4\,6\,5) \}$

Sylow-5-Untergruppe:

$\langle (1\,2\,3\,4\,5) \rangle$

$\shortparallel$

$\{ id, (1\,2\,3\,4\,5), (1\,3\,5\,2\,4),$

$(1\,4\,2\,5\,3), (1\,5\,4\,3\,2) \}$

Sylow-3-UG normal?

- $G = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$:

  Ja, da G abelsch

- $G = SL_2(\mathbb{F}_3)$

  Nein, da normale Sylow-Untergruppen

eindeutig sind, wir aber auch die
Sylow-3-Untergruppe

$$\left\langle \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 0 \\ \bar 1 & \bar 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 0 \\ \bar 1 & \bar 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 0 \\ \bar 2 & \bar 1 \end{pmatrix} \right\}$$

in $SL_2(\mathbb{F}_3)$ haben.

- $G = A_6$

Selbe Argumentation wie bei $SL_2(\mathbb{F}_5)$ mit z.B.

$\langle (1\ 2\ 4), (3\ 5\ 6) \rangle$

Aufgabe 2

(i)

Sei $\varphi : G \to G/N$ die Quotientenabbildung und sei n die Ordnung von $g \in G$. Dann ist

$$\bar{1} = f(1) = f(g^n) = f(g)^n = \bar{g}^n,$$

sodass die Ordnung von $\bar{g}$ ein Teiler von n ist.

(ii)

Nach Lagrange teilt die Ordnung von $\bar{g}$ die Ordnung von G/N, also 2. Somit $\mathrm{ord}(\bar{g}) = 1$ oder $\mathrm{ord}(\bar{g}) = 2$.

Da $\mathrm{ord}(\bar{g})$ ein Teiler von n und n ungerade ist, muss $\mathrm{ord}(\bar{g}) = 1$ gelten. Also $\bar{g} = 1$ und somit $g \in N$.

(iii)

Gäbe es eine Untergruppe H von A_4 mit $[A_4 : H] = 2$, so müsste diese also Ordnung 6 haben und somit eine normale Untergruppe von A_4 sein. Zudem müsste diese nach dem vorherigen Aufgabenteil alle Elemente ungerader Ordnung enthalten. Davon gibt es allerdings mehr als 6:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{id} \\ (1\ 2\ 3) \\ (1\ 3\ 2) \\ (2\ 3\ 4) \\ (2\ 4\ 3) \\ (3\ 1\ 4) \\ (3\ 4\ 1) \end{matrix}\right\} \text{bereits } 7$$

$$\vdots$$

Also kann es keine solche Untergruppe geben.

Aufgabe 3

(i)

Wir betrachten

$nn'n^{-1}(n')^{-1} \in G$

für $n \in N$ und $n' \in N'$. Da N und N' normale Untergruppen von G sind, erhalten wir

$\underbrace{\underbrace{nn'n^{-1}}_{\in N'}(n')^{-1}}_{\in N'}$ und $\underbrace{n\underbrace{n'n^{-1}(n')^{-1}}_{\in N}}_{\in N}$

und somit $nn'n^{-1}(n')^{-1} \in N \cap N'$, sodass $nn'n^{-1}(n')^{-1} = e$ gilt. Daher $nn' = n'n$.

(ii)

Seien (n,n') und $(\tilde{n},\tilde{n}')$ Elemente von $N \times N'$. Dann erhalten wir

$$\mu((n,n')\cdot(\tilde{n},\tilde{n}')) = \mu((n\tilde{n}, n'\tilde{n}')) = n\tilde{n}n'\tilde{n}'$$
$$\overset{(i)}{=} nn' \cdot \tilde{n}\tilde{n}'$$
$$= \mu((n,n')) \cdot \mu((\tilde{n},\tilde{n}')),$$

sodass μ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(iii)

Wir berechnen den Kern von μ:

Sei $(n,n') \in \ker(\mu)$, d.h. sei $nn' = e$. Dann erhalten wir $n = (n')^{-1}$ und somit $n, n' \in N \cap N' = \{e\}$. Also ist der Kern von μ trivial und μ demnach injektiv.

Aufgabe 4

(i)

Nach den Sylow-Sätzen gilt

- $s_p = 1 \mod p$ und $\underbrace{s_p \mid q}_{s_p = 1 \text{ oder } s_p = q}$
- $s_q = 1 \mod q$ und $\underbrace{s_q \mid p}_{s_q = 1 \text{ oder } s_q = p}$.

Da $s_p = 1 \mod p$ gelten muss und $p < p$ ist,
also $s_p = 1$. Zudem muss $s_q = 1$ sein, da nach
Vorraussetzung q kein Teiler von $p-1$ ist.
Somit gibt es genau eine Sylow-p-
Untergruppe und genau eine Sylow-q-Untergruppe,
sodass diese beiden normale Untergruppen von G
sind. Schreibe H_p und H_q für die Sylow-p-Untergruppe bzw. Sylow-q-Untergruppe von G. Dann ist
$H_p \cap H_q = \{e\}$ und zudem

$$|\{h_p h_q \mid h_p \in H_p, h_q \in H_q\}| \underset{\uparrow}{=} pq$$

$\underbrace{\underbrace{e \cdot h_q}_{q \text{ Elemente}}, \underbrace{h_p \cdot e}_{p \text{ Elemente}}}_{\text{nur } e \cdot e \text{ in beiden}}$ enthalten

nach Lagrange. Somit ist nach Aufgabe 3 (iii) die Abbildung

$$\mu : H_p \times H_q \to G, \ (h_p, h_q) \mapsto h_p h_q$$

ein Isomorphismus von Gruppen. Da $|H_p| = p$ und $|H_q| = q$ beide prim sind, ist $H_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $H_q \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ und somit

$$H_p \times H_q \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$$

nach dem chinesischen Restsatz.

(ii)

Da (wie in (i)) $s_p = 1$ und $s_q = 1$ gilt, muss jedes Element von Ordnung p bzw. q in der eindeutigen Sylow-p-UG bzw. Sylow-q-UG. enthalten sein. Somit

- 1 Element der Ordnung 1
- $p-1$ Elemente — " — p
- $q-1$ Elemente — " — q

in G. Da $\underbrace{pq - (p-1) - (q-1) - 1}$ > 0 ist,

$$= pq - p - q + 1$$
$$= (p-1)(q-1)$$

muss G nach Lagrange aber auch Elemente der Ordnung pq (einzige übrige Ordnung) enthalten und somit zyklisch von Ordnung pq sein.