Aufgabe 1

(i)

$\sigma = (1\ 3\ 6)(2\ 4)$ und $\eta = (1\ 2\ 4)(3\ 6\ 5)$

(ii)

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ord}(\eta)=3, \text{ da } \eta \text{ aus. zwei disj. } 3\text{-Zykeln besteht}}}{\eta^5 = \eta^2} = (1\ 4\ 2)(3\ 5\ 6)$$

$$\sigma \circ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ord}(\eta)=3}}{\eta^{-1}} = \sigma \circ \eta^2 = (1\ 3\ 6)(2\ 4) \circ (1\ 4\ 2)(3\ 5\ 6)$$

$$= (1\ 2\ 3\ 5)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ord}(\sigma)=6, \text{ da } \sigma \text{ aus disj. } 2\text{- und } 3\text{-Zykel besteht}}}{\sigma^5} = \sigma^{-1} = (1\ 6\ 3)(2\ 4)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ord}(\eta)=3}}{\eta^3} \circ \sigma = id \circ \sigma = \sigma = (1\ 3\ 6)(2\ 4)$$

(iii)

Bew. von 1.6.4: k-Zykel besteht aus $k-1$ Transpositionen + Lemma 1.6.7

Werden verwenden: sgn von einem k-Zykel ist $(-1)^{k-1}$ und sgn ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\text{sgn}(\sigma \circ \eta^{-1}) = \text{sgn}((1\ 2\ 3\ 5)) = (-1)^3 = -1$$

$$\text{sgn}(\underset{\substack{\uparrow\\ \eta^5=\eta^2}}{\eta^5}) = \text{sgn}(\eta^2) = \text{sgn}((1\ 4\ 2)(3\ 5\ 6))$$

$$= \text{sgn}((1\ 4\ 2) \circ (3\ 5\ 6))$$

$$= \text{sgn}((1\ 4\ 2))\, \text{sgn}((3\ 5\ 6))$$

$$= (-1)^2 \cdot (-1)^2$$

$$= 1$$

$$\text{sgn}(\sigma^5) = \text{sgn}((1\ 6\ 3)(2\ 4)) = \text{sgn}((1\ 6\ 3) \circ (2\ 4))$$

$$= \text{sgn}((1\ 6\ 3))\, \text{sgn}((2\ 4))$$

$$= (-1)^2 (-1)$$

$$= -1$$

$$\operatorname{sgn}(\eta^3 \circ \sigma) = \operatorname{sgn}((1\ 3\ 6)(2\ 4)) \underset{\operatorname{sgn}(\sigma^5)}{\overset{\text{analog zu}}{=}} -1$$

Von diesen Elementen ist also nur $\eta^2 = \eta^5$ ein Element von A_6.

Aufgabe 2

(i)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in UT_3(\mathbb{R}).$$

Dann erhalten wir

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 1-c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit sind die Bahnen

$$UT_3(\mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$UT_3(\mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$UT_3(\mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ 1-c \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

(ii)

Aus unserer Rechnung [redacted] ergibt sich sofort

$$\mathrm{Stab}_{UT_3(\mathbb{R})}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = UT_3(\mathbb{R}),$$

$$\mathrm{Stab}_{UT_3(\mathbb{R})}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\mathrm{Stab}_{UT_3(\mathbb{R})}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii)

Wir haben eine offensichtliche Bijektion

$$\mathrm{Stab}_{UT_3(\mathbb{R})}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto a$$

gegeben. Wir überprüfen nun, dass diese ein Homomorphismus von Gruppen ist:

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & a+b & a+b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\Big) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a+b & a+b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= a + b$$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 3

(i)

Bew. von 1.6.4 oder:

Sei $(x_1 \dots x_k) \in S_n$ ein k-Zykel. Dann ist

$$(x_1 \dots x_k) = (x_1\ x_2)(x_2\ x_3) \dots (x_{k-2}\ x_{k-1})(x_{k-1}\ x_k),$$

sodass sich jeder k-Zykel als Produkt von $k-1$ Transpositionen schreiben lässt.

(ii)

Sei $(x_1\ x_2) \in S_n$ eine Transposition (mit $x_1 < x_2$).

keine Einschränkung, da $(x_1\ x_2) = (x_2\ x_1)$

Dann ex. eine positive ganze Zahl m mit $x_1 + m = x_2$.

Es gilt nun

$$(x_1\ x_2) = (x_1\ \ x_1+m)$$

$$= (x_1+m-1\ \ x_1+m)(x_1+m-2\ \ x_1+m-1) \dots (x_1\ \ x_1+1) \dots (x_1+m-2\ \ x_1+m-1)(x_1+m-1\ \ x_1+m)$$

(iii)

Sei $H = \langle (1\,2), (1 \dots n) \rangle$. Dann enthält H bereits jede Transposition der Form $(k\ \ k+1)$, da

$$(k\ \ k+1) = (1 \dots n)^{k-1}(1\,2)(1 \dots n)^{-(k-1)}.$$

Nach (ii) + (i) enthält H somit jeden Zykel und somit auch jede Permutation. Also $H = S_n$.

ganz formal natürlich per Induktion... bei der Rechnung von $(k\ \ k+1)$ ist die Formel am unklarsten. Dort machen wir daher nochmal das formale Argument (aber ohne Induktion): siehe nächste Seite.

Wissen, dass eine Konjugation eines Zykels wie folgt auszurechnen ist:

$$\tau(x_1 \ldots x_n)\tau^{-1} \underset{1.6.5}{=} (\tau(x_1) \ldots \tau(x_n))$$

Somit ist

$$\begin{aligned}(1 \ldots n)^{k-1}(1\ 2)(1 \ldots n)^{-(k-1)} &= ((1 \ldots n)^{k-1}(1)\ \ (1 \ldots n)^{k-1}(2)) \\ &= (1+(k-1)\ \ \ 2+(k-1)) \\ &= (k\ \ \ k+1),\end{aligned}$$

wie gewünscht.

Aufgabe 4

(i)

Ist $g_1 \cdot \ldots \cdot g_p = 1$, so ist also $g_1^{-1} = g_2 \cdot \ldots \cdot g_p$. Daher ist auch $\underbrace{g_2 \cdot \ldots \cdot g_p}_{= g_1^{-1}} \cdot g_1 = 1$ und wir erhalten nach

m-facher Anwendung, dass $g_{1+m} \cdot \ldots \cdot g_p \cdot g_1 \cdot \ldots \cdot g_m = 1$ ist.

(ii)

Wir wissen, dass $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cdot x| = [\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : \mathrm{Stab}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(x)]$ für alle $x \in X$ erfüllt ist. Nun teilt der Index einer Untergruppe nach Lagrange aber stets die Ordnung der Obergruppe, sodass nur $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cdot x| = 1$ oder $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cdot x| = p$ infrage kommt.

(iii)

Ist $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cdot x| = 1$, so ist x invariant unter zyklischer Permutation. Somit muss jeder Eintrag von x gleich sein. Es ist also $x = (g, \ldots, g) \in G^p$ für ein $g \in G$.

Da zudem $\underbrace{g \cdot \ldots \cdot g}_{p \text{ mal}} = g^p = 1$ gelten muss, teilt die Ordnung eines solchen $g \in G$ auch die Primzahl p.

Das Element $(e, \ldots, e)$ erfüllt diese Bedingungen sicherlich.

(iv)

Die Bahnengleichung hat nun die Form

$$|X| = a + pb,$$

da es nur diese zwei Arten von Bahnen gibt (siehe (ii)). Zudem ist $|X| = n^{p-1}$, da die ersten $p-1$ Einträge eines Elementes $x = (g_1, \ldots, g_p) \in X$ frei wählbar sind, und das letzte dann durch $g_1 \cdot \ldots \cdot g_p = 1$ als Inverses des Produktes der vorherigen Einträge fest gelegt ist. Die Bahnengleichung hat also die Form

$$n^{p-1} = a + pb.$$

(v)

Betrachten wir

$$n^{p-1} = a + pb$$

modulo p, so erhalten wir

$$0 = a \ (p),$$

da p ein Teiler von n ist. Daher ist p auch ein Teiler von a, sodass nach Teil (iii) ein Element der Ordnung p in G existieren muss (wissen nun, dass $a \geq 1$ und $p | a$ gilt, also $a \geq 2$, sodass wir mindestens zwei Element $g \in G$ mit $g^p = 1$ haben). Die von diesem Element erzeugte Untergruppe ist nun die gesuchte Untergruppe der Ordnung p.