Aufgabe 1

(i) Kein Homomorphismus, da

$$f_1\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}}\Bigg) = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

und

$$f_1\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right)f_1\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

(ii) Homomorphismus, da:

Sind $g(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$, $g'(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j \in \mathbb{R}[x]$, so ist

$$g(x) + g'(x) = \sum_{i=0}^{\max(r,s)} (a_i + b_i) x^i$$

wobei $a_i = 0$ für alle $r+1 \leq i \leq \max(r,s)$ und $b_i = 0$ für alle $s+1 \leq i \leq \max(r,s)$. Somit gilt

$$f_2(g(x)+g'(x)) = f_2\left(\sum_{i=0}^{\max(r,s)} (a_i+b_i)x^i\right) = \sum_{i=0}^{\max(r,s)} (a_i+b_i)(x^2)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\max(r,s)} a_i (x^2)^i + \sum_{i=0}^{\max(r,s)} b_i (x^2)^i$$

da $a_i = 0$ für —
$b_i = 0$ für —

$$= \sum_{i=0}^{r} a_i (x^2)^i + \sum_{i=0}^{s} b_i (x^2)^i$$

$$= f_2(g(x)) + f_2(g'(x))$$

(iii) Homomorphismus, da:

Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt

$$f_3(x+y) = \exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y$$

$$= \exp(x)\exp(y)$$

$$= f_3(x) f_3(y)$$

(iv) Kein Homomorphismus, da

$$f_4\Bigg(\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)}_{=\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)}\Bigg) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4$$

und

$$f_4\left(\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\right) + f_4\left(\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\right) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0$$

$$= 2$$

(v) Homomorphismus, da:

Sind $z, z' \in \mathbb{C}^\times$, so gilt

$$f_5(z \cdot z') = \|z \cdot z'\|^m = (\|z\| \cdot \|z'\|)^m = \|z\|^m \cdot \|z'\|^m$$

$$= f_5(z) \cdot f_5(z')$$

Aufgabe 2

(i)

Für alle $a, b, g \in G$ gilt

$$c(ab)(g) = c_{ab}(g) = abg(ab)^{-1} = abgb^{-1}a^{-1}$$
$$= c_a(c_b(g))$$
$$= c(a) \circ c(b)(g),$$

sodass $c : G \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(ii)

Es gilt

$$\ker(c) = \{a \in G \mid c(a) = \mathrm{id}_G\}$$
$$= \{a \in G \mid c_a(g) = g \text{ für alle } g \in G\}$$
$$= \{a \in G \mid aga^{-1} = g \quad \text{—\,"\,—}\}$$
$$= \{a \in G \mid ag = ga \quad \text{—\,"\,—}\}$$
$$= Z(G)$$

(iii)

Sei $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ mit $n \geq 3$. Wir müssen ein Permutation $\sigma' \in S_n$ finden, welche nicht mit σ kommutiert. Da σ nicht die Identität ist, existieren $1 \leq i, j \leq n$ mit $\sigma(i) = j$ und $i \neq j$. Wir wählen nun σ' als die Permutation, welche j und k vertauscht, wobei $1 \leq k \leq n$ mit $i \neq k \neq j$, und sonst alle Elemente auf sich selbst abbildet. Dann gilt

$$\sigma' \circ \sigma(i) = \sigma'(j) = k,$$

was nach Wahl nicht mit

$$\sigma \circ \sigma'(i) = \sigma(i) = j$$

übereinstimmt. Also ist $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$ für alle $n \geq 3$.

Aufgabe 3

(i) stimmt

Ist G eine Gruppe und sind $N_i \subset G$, $i \in I$, normale Untergruppen von G, so ist insbesondere gag^{-1} ein Element von N_i für alle $a \in \bigcap_{i \in I} N_i$, $g \in G$ und $i \in I$. Somit also von $\bigcap_{i \in I} N_i$, sodass der Schnitt $\bigcap_{i \in I} N_i$ auch eine normale Untergruppe von G ist.

Zudem sind Schnitte von Untergruppen stets wieder Untergruppen

(ii) stimmt nicht

Die Abbildung $i: S_2 \to S_3$ gegeben durch $id \mapsto id$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist offenbar ein Homomorphismus von Gruppen. Nun ist S_2 als Untergruppe von sich selbst normal, das Bild $i(S_2)$ jedoch [redacted] keine normale Untergruppe von S_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \notin i(S_2)$$

(iii) stimmt.

Ist $f: G \to G'$ ein surjektiver Homomorphismus von Gruppen und ist $N \subset G$ eine [redacted] normale Untergruppe, so können wir [redacted] wie folgt für

$g'a'g'^{-1}$

mit $a' \in f(N)$ und $g' \in G'$ ein Urbild in N finden.

Zunächst einmal können wir Urbilder $a \in N$ und $g \in G$ von a' bzw. g' wählen und erhalten

$f(gag^{-1}) = f(g)$ [redacted] $f(a) f(g)^{-1} = g'a'g'^{-1}$

Da N eine normale Untergruppe von G ist, liegt gag^{-1} allerdings wieder in N, sodass auch $f(gag^{-1}) = g'a'g'^{-1}$ in $f(N)$ enthalten ist. Also ist $f(N)$ eine normale Untergruppe von G', da Bilder von Untergruppen [redacted] unter Gruppenhomomorphismen erneut Untergruppen sind.

(iv) stimmt

Ist G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G mit Index $[G:H] = 2$, so [redacted] lässt sich also G zerlegen in

$G = H \cup$ [redacted] $G \setminus H$.

Da H eine Untergruppe von G ist, erhalten wir somit

$$aH = \begin{cases} H, & a \in H \\ G \setminus H, & a \in G \setminus H \end{cases} = Ha$$

für alle $a \in G$. Also ist H eine normale Untergruppe von G.

(v) stimmt nicht

Die Gruppe $i(S_2)$ aus Teil (ii) ist eine nicht-normale Untergruppe von S_3 mit Index $[S_3 : i(S_2)] = 3$.

Aufgabe 4

Wir behaupten, dass das Zentrum $Z(GL_n(K))$ durch

$$K \cdot I_n = \{\lambda \cdot I_n \mid \lambda \in K\}$$

gegeben ist.

Ist $\Lambda = \lambda \cdot I_n \in K \cdot I_n$, so gilt

$$\Lambda A = \lambda \cdot I_n \cdot A = \lambda \cdot A = A \cdot \lambda = A \cdot \lambda \cdot I_n = A \cdot \Lambda$$

für jede Matrix $A \in GL_n(K)$. Somit ist $K \cdot I_n$ schon einmal eine Teilmenge von $Z(GL_n(K))$.

Ist andersherum $A \in Z(GL_n(K))$, so kommutiert A mit allen Matrizen aus $GL_n(K)$, also insbesondere mit

$$I_n + \underbrace{E_{ij}}_{\substack{\text{Matrix mit 1} \\ \text{an Stelle } (i,j) \\ \text{und sonst nur} \\ \text{0en, wobei wir} \\ i \neq j \text{ wählen}}}.$$

Es gilt also

$$A + A \cdot E_{ij} = A(I_n + E_{ij}) = (I_n + E_{ij})A = A + E_{ij} \cdot A$$

und somit

$$A \cdot E_{ij} = E_{ij} \cdot A$$

für alle $1 \leq i,j \leq n$ mit $i \neq j$. Betrachten wir nun den (i,l)-ten Eintrag dieses Produktes, wobei $l \neq j$ gelte, so erhalten wir

$$0 = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} (E_{ij})_{rl} = \sum_{r=1}^{n} (E_{ij})_{ir} a_{rl} = a_{jl}.$$

Da dies für alle $1 \leq j \leq n$ gilt, muss A also eine Diagonalmatrix sein. Schauen wir uns stattdessen den (i,j)-ten Eintrag an, so erhalten wir

$$a_{ii} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} (E_{ij})_{rj} = \sum_{r=1}^{n} (E_{ij})_{ir} a_{rj} = a_{jj}.$$

Somit sind alle Diagonalelemente von A gleich, da dies für alle $1 \leq i,j \leq n$ mit $i \neq j$ gilt. Also ist A in $K \cdot I_n$ enthalten.