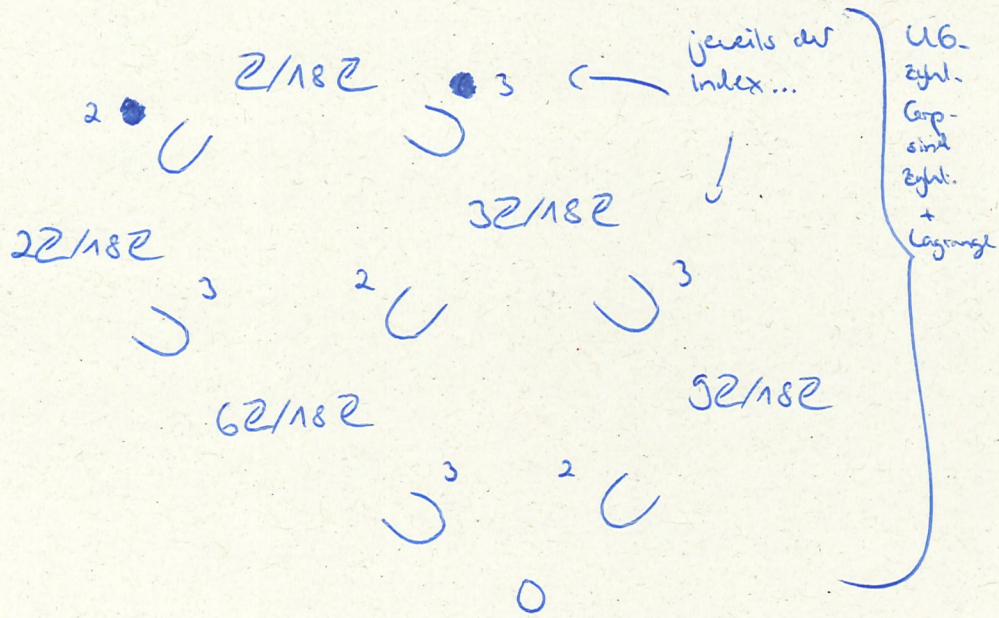
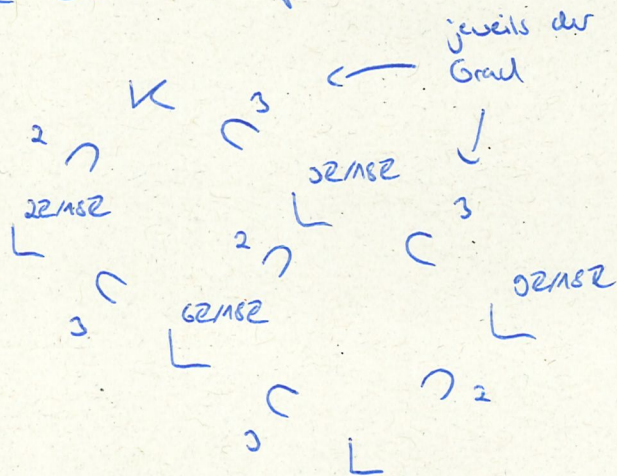


Aufgabe 1

Vermöge der Galois-Korrespondenz schauen wir uns die Untergruppen von $Z/18Z$ an:



Somit sind die Zwischenkörper durch



Es gibt also insgesamt sechs Zwischenkörper mit Grad

$$[L: L] = 1$$

$$[L: L(\sqrt[3]{2})] = 2$$

$$[L: L(\sqrt[3]{3})] = 3$$

$$[L: L(\sqrt[2]{3})] = 6$$

$$[L: L(\sqrt[2]{9})] = 9$$

$$[L: K] = 18$$

$$[L(\sqrt[3]{2}): L(\sqrt[3]{2})] = 3$$

$$[L(\sqrt[3]{2}): K] = 9$$

$$[L(\sqrt[3]{2}): L(\sqrt[2]{3})] = 2$$

$$[L(\sqrt[3]{2}): L(\sqrt[2]{9})] = 3$$

$$[L(\sqrt[3]{2}): K] = 6$$

$$[L(\sqrt[3]{2}): K] = 3$$

$$[L(\sqrt[3]{2}): K] = 2$$

$$[K: K] = 1.$$

Grauformel... wird ab jetzt ohne Kommentar verwendet

Aufgabe 2

(i)

Offenbar ist $0^p = 0$. Daher betrachten wir \mathbb{F}_p^\times mit Ordnung $|\mathbb{F}_p^\times| = p-1$. Nach Lagrange ist also $a^{p-1} = 1$ für alle $a \in \mathbb{F}_p^\times$ und somit $a^p = a$ für alle $a \in \mathbb{F}_p^\times$. Insgesamt also $a^p = a$ für alle $a \in \mathbb{F}_p$.

(ii)

Es ist

$$\begin{aligned} f(x+a) &= (x+a)^p - (x+a) - \lambda \stackrel{\text{Char. } p}{=} x^p + a^p - x - \lambda/a \rightarrow \\ &\stackrel{(i)}{=} x^p - x - \lambda \\ &= f(x) \end{aligned}$$

für alle $a \in \mathbb{F}_p$.

(iii)

Sei $\omega \in K^{\text{alg}}$ eine Nullstelle von f . Dann ist $f(\omega) = 0$ und somit ^{nach (ii)} auch $f(\omega+a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{F}_p$. Also sind

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+p-1 \in K^{\text{alg}}$$

die Wurzeln von f und f ist demnach separabel.

Aufgabe 3

Vermöge der Galois-Korrespondenz erhalten wir

$$\text{ord}(\text{Gal}(L/\mathbb{Q})) = [L:\mathbb{Q}] = [L:\mathbb{Q}(a_n)](\mathbb{Q}(a_n):\mathbb{Q}).$$

Da $f(a_n) = 0$ ist und f irreduzibel ist, erhalten wir

$$\deg(a_n) = \deg(f) = p,$$

sodass $p = [\mathbb{Q}(a_n):\mathbb{Q}]$ ein Teiler von der Ordnung von $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist. Somit besitzt ein Element der Ordnung p nach dem Satz von Cauchy. Da $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ eine Untergruppe von S_p ist und p prim ist, muss dieses Element allerdings bereits ein p -Zykel sein.

(ii)
Sei $\bar{(\)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation, aufgefasst als Automorphismus von \mathbb{Q}^{als} über \mathbb{Q} . Da $\mathbb{Q} \subset L$ per Definition normal ist, definiert $\bar{(\)}$ einen Automorphismus

von L über \mathbb{Q} , also ein Element von $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Nun besitzt f genau zwei echt-komplexe Nullstellen, sodass $\bar{(\)}|_L$ diese beiden permutieren muss und die anderen $p-2$ Nullstellen fix lässt. Anders gesagt, ist $\bar{(\)}|_L$ also eine Transposition.

(iii)

Nach Aufgabe 3 von Blatt 5 muss $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = S_p$ sein, da $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ einen p -Zykel ((i)) und eine Transposition ((ii)) enthält.

Aufgabe 4

Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ist
eine Grad 2 Erweiterung und
somit normal

ist der Zerfällungskörper von $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}(x)$. Somit
ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ galoisch. Nach Aufgabe 3
ist zudem $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}) = S_2$.

Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3})$ ist der Zer-
fällungskörper des separablen Polynomes $(x^2-2)(x^2-3) \in \mathbb{Q}(x)$
und somit eine Galois-Erweiterung von \mathbb{Q} . Wir zeigen nun,
dass $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ ist. Die Gradformel
liefert zunächst

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]}_{\leq 2, \text{ da } \sqrt{3} \text{ Nullstelle von } x^2-3 \text{ ist.}} \underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]}_{= 2, \text{ da } m_{\sqrt{2}} = x^2-2}$$

sodass wir nur zeigen müssen, dass
 $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist. Ang., $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Dann ex. $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ und
somit $3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$. Also $a = 0$
oder $b = 0$. Ist $a = 0$, so ist $3 = 2b^2$
und somit $b = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Q}$. Ist $b = 0$, so
ist $3 = a^2$ und somit $a = \pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Es ist also $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$. Damit
ist auch $|\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})| = 4$
und $\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$ und $\sigma(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$
für jedes Element $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$
nach Satz 3.5.2. Diese Bedingungen legen
ein solches σ aber auch fest, da σ
den Körper \mathbb{Q} fixiert und $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3}$
eine \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ist. Es
ist also

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}) = \{\text{id}, \tau_1, \tau_2, \tau_1 \circ \tau_2\},$$

wobei $\tau_1(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\tau_1(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ und
 $\tau_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ und $\tau_2(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$. Da
alle diese Elemente der Ordnung 2 sind,
muss nun $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
sein.