Aufgabe 1

Schritt 1: ✓ ist eine der möglichen Formulierungen des algebraisch abgeschlossen-seins.

Schritt 2: ✓ keine Nullstelle zu haben bedeutet genau, dass f an keinem Körperelement von $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ ausgewertet die Zahl $\bar{0}$ annimmt.

Schritt 3: ✓ Schritt 2 + gegebene Erklärung

Schritt 4: ✗ Polynom $\neq$ Polynomfunktion; z.B. erfüllt auch $f = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ die Gleichungen $f(0) = 1 = f(1)$. Hier liegt Herr Wittichs Cousin also falsch.

zeigt, dass $\mathbb{F}_2$ nicht algebraisch abgeschlossen ist

Schritt 5: (✓) wäre eine korrekte Folgerung, ist aber aufgrund des falschen vierten Schrittes insgesamt hinfällig

Aufgabe 2

Damit f in seinem Zerfällungskörper in Linearfaktoren zerfallen kann, muss der Zerfällungskörper alle Nullstellen von f enthalten und somit auch $K(a_1, \ldots, a_n)$ enthalten. Da die Körpererweiterung

$$K \subset K(a_1, \ldots, a_n)$$

also nur das Nötigste zu K hinzufügt, muss diese also der Zerfällungskörper von f sein.

Nach Aufgabenstellung ist der max. Grad des Minimalpolynomes m_{a_1} von a_1 genau n. Somit erhalten wir

$$[K(a_1) : K] \leq n.$$

Über $K(a_1)$ können wir nun $\frac{f}{x-a_1}$ betrachten, welches Grad $n-1$ hat. Dies ist erneut der größtmögliche Grad des Minimalpolynomes m_{a_2} von a_2 über $K(a_1)$, da $a_1 \in K(a_1)$ eine Nullstelle von $f \in K(a_1)[x]$ ist. Somit

$$[K(a_1, a_2) : K(a_1)] \leq n - 1.$$

„wenn man das Spiel so weiterspielt …“

Induktiv erhalten wir also

$$[K(a_1, \ldots, a_i) : K(a_1, \ldots, a_{i-1})] \leq n - (i-1)$$

für alle $1 \leq i \leq n$ und somit nach der Gradformel

$$[K(a_1, \ldots, a_n) : K] = \prod_{i=1}^{n} [K(a_1, \ldots, a_i) : K(a_1, \ldots, a_{i-1})]$$

$$\leq 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$= n!$$

Aufgabe 3

(i) Stimmt

Ist K ein endlicher Körper, so ist

$$\left(\prod_{a\in K}(x-a)\right)+1 \in K[x]$$

und hat nach Konstruktion keine Nullstelle in K.

(ii) Stimmt

Ist $K\subset L$ eine Körpererweiterung mit $[L:K]=2$, so ist $K\subsetneq L$. Also ex. ein Element $a\in L\setminus K$. Dieses muss nun Grad $\deg(a)\geq 2$ haben (da $a\notin K$) und somit bereits $L=K(a)$ erfüllen. Betrachten wir nun

$$\mu_a = x^2+a_1x+a_0 \in K[x]$$

und sind $\omega_1,\omega_2\in K^{alg}$ die Nullstellen von μ_a, so gilt also

$$\mu_a=(x-\omega_1)(x-\omega_2)=x^2-(\omega_1+\omega_2)x+\omega_1\omega_2$$

über K^{alg}. Also $-(\omega_1+\omega_2)=a_1\in K\subset L$ und $\omega_1\omega_2=a_0\in K\subset L$. Da a eine dieser Nullstellen ist, sind nun vermöge

$$-(\omega_1+\omega_2)\in K$$

beide in $L=K(a)$ enthalten. Somit ist $L=K(\omega_1,\omega_2)$ der Zerfällungskörper von μ_a und daher eine normale Körpererweiterung von K.

(iii) Stimmt nicht

Siehe Blatt 10 Aufgabe 3 (v):

$\underbrace{\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}_{\text{Grad } 3}$ ist nicht normal

(iv) Stimmt

Seien $K \subset L_i$, $i \in I$, normale Körpererweiterungen, und sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(K^{alg}/K)$. Dann gilt also $\sigma(L_i) \subset L_i$ für alle $i \in I$ ~~[illegible]~~ und somit auch $\sigma(\bigcap_{i \in I} L_i) \subset L_i$ für alle $i \in I$. Also $\sigma(\bigcap_{i \in I} L_i) \subset \bigcap_{i \in I} L_i$, sodass die Körpererweiterung $K \subset \bigcap_{i \in I} L_i$ normal ist.

(v) Stimmt

Sei $K \subset E$ eine endliche Körpererweiterung mit K-Basis $a_1, \dots, a_n \in E$. Sei darüberhinaus L der Zerfällungskörper von $\mu_{a_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{a_n}$. Dann ist $K \subset L$ eine endliche normale Körpererweiterung. Da L alle Wurzeln von $\mu_{a_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{a_n}$ und somit insbesondere $a_1, \dots, a_n$ enthält, enthält L jede K-Linearkombination von $a_1, \dots, a_n$. Also haben wir $E \subset L$. Somit insgesamt

$$\underbrace{K \subset E \subset L}_{\text{Grad} \leq \deg(\mu_{a_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{a_n})! \text{ nach Aufgabe 2}}$$

Aufgabe 4

(i)

Es ist $(\sqrt[4]{2})^4 - 2 = 0$ und $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ nach Eisenstein mit $p = 2$ irreduzibel. Somit

$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4.$

(ii)

Setze $E := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dann ist offenbar $\mathbb{Q} \subset E$. Da $\sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ und $(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$, ist aber auch $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Vermöge der Gradformel

$$\underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}]}_{=4} = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]\underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]}_{=2}$$

erhalten wir, dass $\underbrace{\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})}_{\text{Grad } 2} \underbrace{\subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}_{\text{Grad } 2}$ als Grad 2 Körpererweiterungen nach Aufgabe 3 (i) (bzw. deren Jeweils) normale Körpererweiterungen sind

(iii)

Da $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{R}$ ist, aber $(i\sqrt[4]{2})^4 - 2 = 0$ ist, kann $x^4 - 2$ nicht über $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ in Linearfaktoren zerfallen und somit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ nicht normal sein.