Aufgabe 1

Wir betrachten die Körpererweiterungen

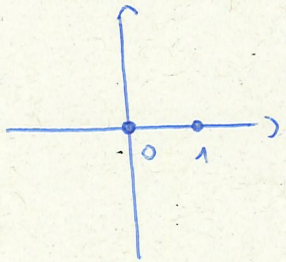
$$K \subset K(a) \subset L$$

für ein Element $a \in L \setminus K$. Die Grad-formel besagt nun

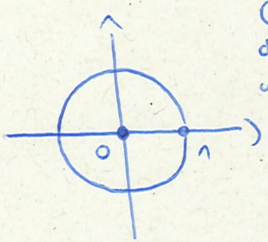
$$p = [L:K] = [L:K(a)][K(a):K],$$

wobei $[K(a):K] \geq 2$ sein muss, da a nicht in K liegt. Da $[K(a):K]$ zudem ein Teiler von p ist, muss also $[K(a):K]$ und somit nach der Gradformel $[L:K(a)] = 1$ gelten. Also haben wir $L = K(a)$.

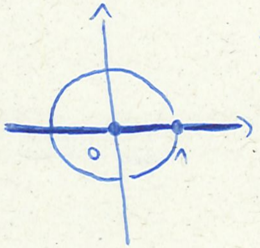
Aufgabe 2



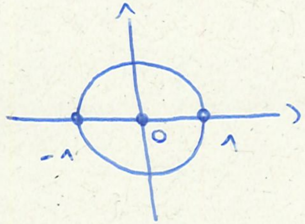
Kreis mit Radius 1 um 0



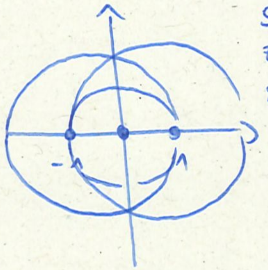
Gerade durch 0 und 1



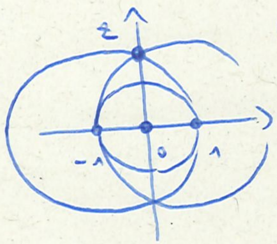
-1 als Schnitt-punkt von Kreis und Gerade



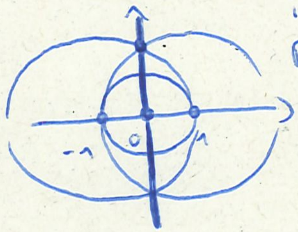
Kreise mit Radius 2 um -1 und 1



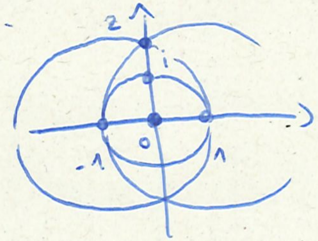
Schnittpunkt z der zwei großen Kreise



Gerade durch z und 0



i als Schnitt-punkt von Kreis und Gerade



Aufgabe 3

(i)

Wäre a^2 algebraisch, so nach Blatt 10 Aufgabe 3 (ii) (bzw. der Lösung davon) auch a. Also ist a^2 ebenfalls transzendent

(ii)

Zunächst gilt offenbar $K(a^2) \subset K(a)$. Angenommen, $a \in K(a^2) \cong K(x)$. Dann ex. Polynome $f, g \in K[x]$ mit $a = \frac{f(a^2)}{g(a^2)}$ und somit

$$\underbrace{g(a^2) \cdot a}_{\text{nur ung. Potenzen von } a} = \underbrace{f(a^2)}_{\text{nur ger. Potenzen von } a}.$$

Da die a^i, $i \geq 0$, linear unabhängig sind, muss also $f = g = 0$ gelten ↯. Somit haben wir $a \in K(a) \setminus K(a^2)$.

Die Inklusionen (iii)

$$K \subset \_ \subset K(a^8) \subset K(a^4) \subset K(a^2) \subset K(a)$$

bilden nach (ii) eine unendliche Folge von Zwischenkörpern.

Aufgabe 4

Analog zum Beweis von Kor. 3.3.7 (a) rechnen wir den Grad einer p^2-ten [redacted] primitiven Einheitswurzel ζ_{p^2} aus.

Da $\zeta_{p^2}^p - 1 \neq 0$ und

$$x^{p^2} - 1 = (x^p - 1)\underbrace{(1 + x^p + x^{2p} + \ldots + x^{(p-1)p})}_{=: f \in \mathbb{Q}[x]},$$

muss $f(\zeta_{p^2}) = 0$ gelten. Nun ist f normiert, sodass es genügt nachzuweisen, dass f irreduzibel ist. Vermöge des Iso's

$$\mathbb{Q}[x] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}[x]$$
$$x \mapsto x+1$$

(also $g(x) \mapsto g(x+1)$) weisen wir dies für $f(x+1)$ nach. Das klappt analog zu Blatt 9 Aufgabe 4:

Modulo p erhalten wir

$$g(x+1) = \frac{(x+1)^{p^2} - 1}{(x+1)^p - 1} = \frac{(x^p + 1^p)^2 - 1}{x^p + \cancel{1^p} - \cancel{1}} = x^{(p-1)p}$$

$x^p + px^p + 1^p$

$\equiv \bmod p$

$x^p + 1^p$

Somit sind alle Koeffizienten von $f(x+1)$ bis auf den Leitkoeffizienten durch p teilbar. Da der konstante Term $f(0+1) = p$, ist zudem nicht durch p^2 teilbar, sodass $f(x+1)$ nach Eisenstein irreduzibel ist.

Es ist also $\deg(\zeta_{p^2}) = \underbrace{(p-1)p}_{\text{keine 2er-Potenz}}$ und somit $\overset{3.3.4}{}$ ist das reg. p^2 Eck nicht ZL-konstruierbar.