Aufgabe 1

(i)

Für $\underbrace{}_{a_3=1} f = x^3 \underbrace{- 6x^2}_{a_2=-6} + \underbrace{4x}_{a_1=4} + \underbrace{6}_{a_0=6} \in \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x]$

gelten

- $2 \mid a_0, a_1, a_2$
- $2 \nmid a_3$
- $2^2 \nmid a_0$

Somit ist f nach Eisenstein mit $p = 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

(ii)

Da $a^3 - 6a^2 + 4a + 6 \overset{(*)}{=} 0$ in $\mathbb{Q}(a)$, ist auch

- $a^4 - 6a^3 + 4a^2 + 6a = 0$

und

$$a^5 - 6a^4 + 4a^3 + 6a^2 = 0$$

in $\mathbb{Q}(a)$. Somit erhalten wir durch einsetzen

$$\begin{aligned} a^5 &= 6a^4 - 4a^3 - 6a^2 \\ &= 6(6a^3 - 4a^2 - 6a) - 4a^3 - 6a^2 \\ &= 32a^3 - 30a^2 - 36a \\ &= \underbrace{32(6a^2 - 4a - 6)}_{192} - 30a^2 - 36a \\ &= 162a^2 - 164a - 192 \end{aligned}$$

Durch Multiplikation von $(*)$ mit a^{-1} erhalten wir zudem

$$a^2 - 6a + 4 + 6a^{-1} = 0$$

und somit

$$a^{-1} = -\frac{1}{6}a^2 + a - \frac{2}{3}.$$

Da

$$\underbrace{(a+1)(a^2 - 7a + 11)}_{} - 5 = 0,$$

$$\begin{aligned} &= a^3 - 7a^2 + 11a \\ &+ a^2 - 7a + 11 \\ &= a^3 - 6a^2 + 4a + 11 \end{aligned}$$

ist

$$a+1 = \frac{5}{a^2 - 7a + 11}$$

und somit

$$(a+1)^{-1} = \frac{1}{5}a^2 - \frac{7}{5}a + \frac{11}{5}.$$

Aufgabe 2

(i)

Es ist $(\sqrt[3]{2})^3 - 2 = 0$, sodass $\sqrt[3]{2}$ eine Nullstelle von $\underbrace{x^3 - 2}_{=f_1} \in \mathbb{Q}[x]$ ist. Zudem ist

f_1 offenbar normiert und irreduzibel nach dem Eisenstein-Kriterium für $p = 2$. Also ist f_1 das Minimalpolynom von $a_1 = \sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$.

(ii)

Es ist $\underbrace{(1+i)^2}_{=\cancel{1}+2i-\cancel{1}} - 2(1+i) + 2 = 0$, sodass $1+i$ eine Nullstelle von $\underbrace{x^2 - 2x + 2}_{=f_2} \in \mathbb{Q}[x]$ ist.

Da f_2 zudem normiert und nach dem Eisenstein-Kriterium für $p = 2$ irreduzibel ist, ist f_2 das Minimalpolynom von $1+i$ über $\mathbb{Q}$.

(iii)

Es ist $\underbrace{(\sqrt{2}+1)^2}_{=2+2\sqrt{2}+1} - 2(\sqrt{2}+1) - 1 = 0$, sodass $\sqrt{2}+1$ eine Nullstelle von $\underbrace{x^2 - 2x - 1}_{=f_3} \in \mathbb{Q}[x]$ ist.

Zudem ist f_3 normiert und irreduzibel, da die beiden Nullstellen $\sqrt{2} \pm 1$ von f_3 nicht in $\mathbb{Q}$ liegen. Also ist f_3 das Minimalpolynom von $\sqrt{2}+1$ über $\mathbb{Q}$.

(iv)

Nach der Vorlesung ist $\overbrace{x^2 + x + 1}^{=f_4} \in \mathbb{Q}[x]$ das Minimalpolynom von $\zeta_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

(v)

Es ist $(e^{\frac{2\pi i}{5}} \sqrt[5]{3})^5 - 3 = 0$, sodass $e^{\frac{2\pi i}{5}} \sqrt[5]{3}$ eine Nullstelle von $\underbrace{x^5 - 3}_{=f_5} \in \mathbb{Q}[x]$ ist. Da dieses Polynom normiert und nach Eisenstein für $p = 3$ irreduzibel ist, ist es also das Minimalpolynom von $e^{\frac{2\pi i}{5}} \sqrt[5]{3}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3

(i) Stimmt

„=>": Da $\deg(a) = 1$ ist, muss das Minimalpolynom von a von der Form $x - b$ für ein $b \in K$ sein. Da es an a verschwinden muss somit $b = a$, sodass $a \in K$ ist.

„<=": Ist $a \in K$, so ist $x - a \in K[x]$. Da $x - a$ normiert und irreduzibel und a als Nullstelle hat, ist es das Minimalpolynom von a, sodass $\deg(a) = 1$ ist.

(ii) Stimmt

„=>": Da $a \in K(a)$ ist, ist auch $a^n \in K(a)$ für alle $n \geq 2$. Somit erhalten wir $K(a^n) \subset K(a)$. Nun ist $K(a)$ nach Annahme ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und somit auch der Unterraum $K(a^n)$. Also ist a^n für alle $n \geq 2$ algebraisch.

„<=": Sei $n \geq 2$ so, dass a^n algebraisch über K ist. Dann ex. ein Polynom $f = \sum_{i=1}^{r} a_i x^i \in K[x]$ mit $f(a^n) = 0$ und $f \neq 0$. Daher ist

$$g = \sum_{i=1}^{r} a_i x^{in} \in K[x]$$

ein Polynom, welches a als Nullstelle hat, sodass a auch algebraisch über K ist.

(iii) Stimmt

Es ist $K(a) \cong K[x]/(\underbrace{\mu_a}_{\text{Minimalpolynom von } a}) = K[x]/(\mu_{a'}) \cong K(a')$

nach Satz 3.2.1

(iv) Stimmt nicht.

Es ist $\mathbb{Q}(0) = \mathbb{Q} = \mathbb{Q}(1)$, aber $\mu_0 = x$ und $\mu_1 = x - 1$.

(v) Stimmt nicht

Das Element $\sqrt[3]{2}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ mit Minimalpolynom $x^3 - 2$ (vgl. Aufgabe 2). Über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ gilt nun

$$x^3 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})\underbrace{(x^2 + \sqrt[3]{2} + \underbrace{\sqrt[3]{4}}_{=(\sqrt[3]{2})^2})}_{\text{hat rein komplexe Nullstellen}},$$

sodass $x^3 - 2$ über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nicht in Linearfaktoren zerfallen kann, da $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Sei $\mu_a = x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lambda_0 \in K[x]$ das Minimalpolynom von a über K.

Wir berechnen die darstellende Matrix von der K-lin. Abb.

$m_a : K(a) \to K(a)$

bzgl. der Basis $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$:

$$m_a(a^i) = \begin{cases} a^{i+1} & , \quad 0 \le i \le n-2 \\ a^n = \sum_{i=0}^{n-1} -\lambda_i a_i & , \quad i = n-1 \end{cases}$$

Somit ist die darst. Matrix durch

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -\lambda_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & -\lambda_{n-2} \\ & & 1 & -\lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

gegeben. Nach Blatt 6 Aufgabe 4 aus LA II ist das Minimalpolynom von m_a daher genau μ_a.

Lösungsvorschläge sind online