Aufgabe 1

(i)

Ist keine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$, da

$$\underbrace{(1+2i)}_{Re > 0}^2 = 1 + 4i - 4 = \underbrace{-3+4i}_{Re < 0},$$

sodass $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid Re(z) > 0\}$ nicht unter der Multiplikation abgeschlossen ist.

(ii)

Ist eine Untergruppe:

Zunächst einmal schreiben wir die infrage kommende Menge zu

$$\{z \in \mathbb{C}^\times \mid Re(z) > 0 \text{ und } Im(z) = 0\} = \mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{C}^\times$$

um. Somit sehen wir bereits, dass diese nicht leer ist. Sind nun $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist auch $y^{-1} \in \mathbb{R}_{>0}$ und daher auch $xy^{-1} \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Lemma 1.1.9 ist $\mathbb{R}_{>0}$ also eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$.

(iii)

Ist eine Untergruppe:

Elemente von

$$\{z \in \mathbb{C}^\times \mid Re(z) = 0 \text{ oder } Im(z) = 0\}$$

sind reell oder rein imaginär, also von der Form x oder iy für reelle Zahlen x und y. Deren Inversen sind x^{-1} und $-iy^{-1}$, sodass Produkte von Elementen aus

$$\{z \in \mathbb{C}^\times \mid Re(z) = 0 \text{ oder } Im(z) = 0\}$$

und Inversen von Elementen aus selbiger Menge ebenfalls reell oder rein imaginär sind. Da diese Menge zudem nicht leer ist, bildet sie nach Lemma 1.1.9 eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$.

(iv)

Ist keine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$, da

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\| \| \leq 1}^{-1} = \underbrace{2}_{\| \| > 1},$$

sodass $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \|z\| \leq 1\}$ nicht abgeschlossen unter Inversenbildung ist.

(v)

Ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$:

Zunächst einmal ist

$\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \|z\| = 1\}$

nicht leer, da $\|1\| = 1$. Ein Element aus dieser Menge ist von der Form $e^{i\varphi}$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$. Sind also $e^{i\varphi}, e^{i\psi}$ zwei Elemente aus der Menge

$\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \|z\| = 1\}$,

so auch

$$e^{i\varphi} \cdot (e^{i\psi})^{-1} = e^{i\varphi} \cdot e^{-i\psi} = e^{i(\varphi - \psi)},$$

da $e^{i(\varphi-\psi)} = e^{i(\varphi-\psi)} \cdot \underbrace{e^{i2\pi k}}_{=1}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt ist, dass $\varphi - \psi + 2\pi k \in [0, 2\pi)$. Somit ist nach Lemma 1.1.9 $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \|z\| = 1\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$.

Aufgabe 2

Wir betrachten zunächst die Untergruppen, welche von einem Element erzeugt werden:

- $\langle id \rangle = \{id\}$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Nun die Untergruppen, welche von zwei Elementen erzeugt werden, wobei wir das neutrale Element und Paare von einem Element und seinem Inversen (falls diese unterschiedlich sind) weglassen:

- $\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{=: \tau_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=: \tau_{13}} \rangle = S_3$, da

$$\tau_{13} \circ \tau_{12} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=: \sigma_{123}},$$

$$\tau_{12} \circ \sigma_{123} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{=: \tau_{23}},$$

$$\sigma_{123}^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=: \sigma_{312}}.$$

- $\langle \tau_{12}, \tau_{23} \rangle = S_3 = \langle \tau_{13}, \tau_{23} \rangle$ analog
- $\langle \tau_{12}, \sigma_{123} \rangle = S_3$, da

$$\tau_{12} \circ \sigma_{123} = \tau_{23},$$

$$\sigma_{123} \circ \tau_{12} = \tau_{13},$$

$$\sigma_{123}^{-1} = \sigma_{132}.$$

- $\langle \tau_{13}, \sigma_{123} \rangle = S_3 = \langle \tau_{23}, \sigma_{123} \rangle$ analog

Zudem brauchen wir die Fälle $\langle \tau_{ij}, \sigma_{132} \rangle$ nicht betrachten, da dort bereits σ_{123} enthalten ist und wir somit auf vorherige Fälle zurückgreifen können. Ebenfalls sehen wir, dass wir keine Erzeugnisse von mehr als zwei Elementen betrachten müssen, da wir stets bereits ganz S_3 erhalten haben.

Eine vollständige Liste aller Untergruppen von S_3 ist also durch

- $\{id\}$
- $\langle \tau_{12} \rangle, \langle \tau_{13} \rangle, \langle \tau_{23} \rangle$
- $\langle \sigma_{123} \rangle$
- S_3

gegeben.

Bis auf S_3 selbst sind dies alles abelsche Gruppen, da diese nur aus Potenzen eines einzelnen Elementes bestehen. Die Gruppe S_3 ist nicht abelsch, da z.B.

$\tau_{12} \circ \sigma_{123} = \tau_{23}$

und

$\sigma_{123} \circ \tau_{12} = \tau_{13}$.

Aufgabe 3

Wir definieren

$+_a : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ (m,n) \mapsto m + n - a$

und weisen nach, dass $(\mathbb{Z}, +_a)$ eine Gruppe mit neutralem Element a bildet:

- Assoziativität:

  Sind $l, m, n \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\begin{aligned} (l +_a m) +_a n &= (l + m - a) +_a n \\ &= l + m - a + n - a \\ &= l + m + n - a - a \\ &= l + (m +_a n) - a \\ &= l +_a (m +_a n) \end{aligned}$$

aufgrund der Assoziativität und Kommutativität der "normalen" Addition auf $\mathbb{Z}$.

- Neutrales Element:

  Ist $m \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\begin{aligned} m +_a a = m + a - a = m &= -a + a + m \\ &= a + m - a \\ &= a +_a m, \end{aligned}$$

wobei wir erneut verwenden, dass $(\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Somit ist a das neutrale Element von $+_a$ in $\mathbb{Z}$.

erwähnen wir nicht nochmal explizit

- Inverse Elemente:

  Ist $m \in \mathbb{Z}$, so auch $-m + 2a \in \mathbb{Z}$ und es gilt

$$\begin{aligned} m +_a (-m + 2a) &= m + (-m + 2a) - a \\ &= a \\ &= (-m + 2a) + m - a \\ &= (-m + 2a) +_a m. \end{aligned}$$

Also ist $(-m + 2a)$ das Inverse zu m und $(\mathbb{Z}, +_a)$ insgesamt eine Gruppe mit neutralem Element a.

Aufgabe 4

(i)

Ist $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}_{>0}$, so gilt

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}}_{a \text{ mal}}, \quad \text{falls } a \geq 0$$

und

$$\frac{a}{b} = -\Big(\underbrace{\frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}}_{a \text{ mal}}\Big), \quad \text{falls } a < 0.$$

Wir erhalten also

$$\frac{a}{b} \in \langle \tfrac{1}{b} \rangle \subset \langle \{ \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \} \rangle$$

und somit

$$\mathbb{Q} = \langle \{ \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \} \rangle, \text{ da } \langle \{ \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \} \rangle \subset \mathbb{Q}.$$

(ii)

Sei $A = \{ \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_r}{b_r} \}$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{Q}$, wobei $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ und $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{N}_{>0}$. Zunächst einmal können wir annehmen, dass

$\underbrace{b_1 = \ldots = b_r}_{= b}$ (bring alle auf gleichen Nenner).

Sei nun $\frac{a}{b} \in \langle A \rangle$ und wähle $a_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ minimal mit $\frac{a_0}{b} \in \langle A \rangle$. [redacted] Wir können zudem annehmen, dass $a \in \mathbb{N}$ nicht negativ ist (ansonsten betrachten wir $-a_0$). Division mit Rest liefert nun

$$a = qa_0 + r$$

[redacted] für ein [redacted] $q \in \mathbb{N}$ und ein $r \in \mathbb{N}$ mit $r < a_0$. Wir erhalten

$$\frac{r}{b} = \underbrace{\frac{a}{b}}_{\in \langle A \rangle} - \underbrace{\frac{qa_0}{b}}_{\in \langle A \rangle} \in \langle A \rangle,$$

sodass aufgrund der Minimalität von a_0 bereits $r = 0$ gelten muss. Somit gilt

$$\frac{a}{b} = q \frac{a_0}{b} \in \langle \tfrac{a_0}{b} \rangle$$

und wir erhalten $\langle A \rangle \subset \langle \frac{a_0}{b} \rangle$. Andersherum gilt natürlich auch $\langle \frac{a_0}{b} \rangle \subset \langle A \rangle$, sodass $\langle A \rangle$ von $\frac{a_0}{b}$ erzeugt wird.

(iii)

Gäbe es eine endliche Teilmenge $A \subset \mathbb{Q}$ mit $\langle A \rangle = \mathbb{Q}$, so erhielten wir $\mathbb{Q} = \langle \frac{a}{b} \rangle$ für ein geeignetes $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ nach Teil (ii). Da $\frac{1}{b+1} \notin \langle \frac{a}{b} \rangle$ und $\frac{1}{b+1} \in \mathbb{Q}$, kann dies aber nicht sein. Die Gruppe $\mathbb{Q}$ kann also nicht durch endlich viele Elemente erzeugt werden.