Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Fertigen Sie eine Liste aller Polynome $f \in \mathbb{F}_2[x]$ mit $\deg(f) = 2$ an und testen Sie diese anschließend auf Irreduzibilität.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Geben Sie für die folgenden Ideale einen Erzeuger an falls diese Hauptideale sind oder zeigen Sie, dass sie kein Hauptideal sind:

(i) $(4, 6) \subset \mathbb{Z}$

(ii) $(3, 29) \subset \mathbb{Z}[x]$

(iii) $(\overline{x}, \overline{y}) \subset \mathbb{R}[x, y]/(xy)$

(iv) $(\frac{xy^2+1}{x}, ix) \subset \mathbb{C}(x)[y]$

(v) $\{f \in \mathbb{Z}[x] \mid 2 \text{ teilt } f(0)\} \subset \mathbb{Z}[x]$

Aufgabe 3 (5 Punkte):
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass für jeden Körper K der Polynomring $K[x]$ ein Hauptidealring ist. Hier wollen wir nun die Umkehrung zeigen. Sei also R ein Ring, sodass $R[x]$ ein Hauptidealring ist. Für ein Element $r \in R$ mit $r \neq 0$ betrachten wir das Ideal $(r, x) \subset R[x]$. Da $R[x]$ ein Hauptidealring ist, existiert ein $f \in R[x]$ mit $(r, x) = (f)$.

(i) Begründen Sie, dass $\deg(f) = 0$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f eine Einheit ist.

(iii) Folgern Sie mit Hilfe einer geeigneten Evaluationsabbildung, dass r eine Einheit ist und somit R ein Körper ist.

(iii) Nutzen Sie die nun gezeigte Umkehrung um zu folgern, dass Polynomringe in mehr als einer Unbestimmten keine Hauptidealringe sein können.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Wir betrachten den Unterring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{R}$.

(i) Begründen Sie kurz, dass R integer ist.

(ii) Rechnen Sie die Einheitengruppe von R aus.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 8

(iii) Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist, indem Sie zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen von $6 \in R$ angeben.

Hinweis: Für Aufgabenteile (ii) und (iii) dürfen Sie verwenden, dass die Abbildung

$$N\colon R \to \mathbb{N},\ a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2$$

multiplikativ ist, d.h. es ist $N(xy) = N(x)N(y)$ für alle $x, y \in R$. Ein möglicher Ansatz bei (ii) ist nun zu zeigen, dass $N(x) = 1$ ist, wenn $x \in R$ eine Einheit ist.