Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 7

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Sei R ein Ring. Welche der folgenden Abbildungen sind stets Ringhomomorphismen?

(i) $\alpha\colon \{0\} \to R$, $0 \mapsto 0$

(ii) $\beta\colon R \to \{0\}$, $r \mapsto 0$

(iii) $\gamma\colon R \to R$, $r \mapsto -r$

(iv) $\delta\colon R[x] \to R[x]$, $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$

(v) $\Delta\colon R \to R \times R$, $r \mapsto (r, r)$

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Jeder Körper besitzt genau zwei Ideale.

(ii) Jeder Ringhomomorphismus von einem Ring in einen Körper ist injektiv.

(iii) Jeder Ringhomomorphismus von einem Körper in einen Ring, welcher nicht der Nullring ist, ist injektiv.

(iv) Bilder maximaler Ideale unter Ringhomomorphismen sind erneut maximale Ideale.

(v) Urbilder maximaler Ideale unter Ringhomomorphismen sind erneut maximale Ideale.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Wir betrachten den Unterring $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ isomorph zu dem Ring $\mathbb{Z}[x]/(2x-1)$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Seien R und S Ringe und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $R \times S$. Zeigen Sie, dass es Ideale $\mathfrak{b} \subset R$ und $\mathfrak{c} \subset S$ gibt, sodass $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$ ist. Gilt die analoge Aussage auch für Gruppen und normale Untergruppen?