Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Geben Sie für die folgenden Gruppen G für jeden Primteiler p der Ordnung von G jeweils eine Sylow-p-Untergruppe von G an (insgesamt dürfen Sie eine Sylow-Untergruppe auslassen ohne Punkte zu verlieren):

(i) $G = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$

(ii) $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$

(iii) $G = A_6$

Sind Ihre gefundenen Sylow-3-Untergruppen normale Untergruppen?
Erinnerung/Hinweis: Die Ordnung von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ ist

$$p^{\binom{n}{2}} \prod_{i=0}^{n-2} (p^{n-i} - 1) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)}{p-1}.$$

Zudem kann man eine Sylow-2-Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ als Menge der Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ finden, welche spurlos oder eine Skalarmatrix sind. Bei diesem Bsp. brauchen Sie nicht nachzurechnen, dass es wirklich eine Untergruppe ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Zeigen Sie mit Hilfe folgender Anleitung, dass es eine endliche Gruppe G gibt, welche nicht zu jedem Teiler m ihrer Ordnung eine Untergruppe der Ordnung m besitzt:

(i) Sei G eine endliche Gruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler. Sei außerdem $g \in G$ und betrachte $\overline{g} \in G/N$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von $\overline{g}$ ein Teiler der Ordnung von g ist.

(ii) Nehmen Sie nun $[G : N] = 2$ an und sei $g \in G$ von ungerader Ordnung. Zeigen Sie, dass dann $\overline{g}$ das neutrale Element sein muss.

(iii) Folgern Sie, dass eine Untergruppe vom Index 2 in A_4 mehr als sechs Elemente beinhalten müsste und erzeugen Sie somit einen Widerspruch.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei G eine Gruppe und seien N und N' zwei normale Untegruppen von G. Wir nehmen nun an, dass der Schnitt $N \cap N'$ die triviale Gruppe ist.

(i) Rechnen Sie nach, dass Elemente von N mit Elementen von N' kommutieren.

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 6

(ii) Folgern Sie, dass die Produktabbildung $\mu\colon N \times N' \to G$, $(n, n') \mapsto nn'$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(iii) Zeigen Sie, dass μ injektiv ist. Insbesondere ist μ ein Isomorphismus, falls die Untergruppe $\operatorname{im}(\mu) = \{nn' \mid n \in N, n' \in N'\}$ mit der Gruppe G übereinstimmt.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung pq, wobei p und q zwei Primzahlen mit $p > q$ sind. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass q kein Teiler von $p-1$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Sylow-Sätze auf folgende Weisen, dass G isomorph zu $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ ist und es somit bis auf Isomorphie nur eine Gruppe einer solchen Ordnung gibt:

(i) Unter Verwendung von Aufgabenteil (iii) von Aufgabe 3.

(ii) Durch Zählen der Elemente der Ordnung pq.