Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 5

Aufgabe 1 (5 Punkte):

(i) Geben Sie die folgenden Elemente aus S_6 in der Zykelschreibweise an:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(ii) Berechnen Sie $\sigma \cdot \eta^{-1}$, η^2, σ^5, $\eta^3 \cdot \sigma$ und η^5.

(iii) Bestimmen Sie das Signum der Elemente des vorherigen Aufgabenteils. Welche von diesen Elementen sind Elemente von A_6?

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei $G = \mathrm{UT}_3(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale. Wir betrachten in dieser Aufgabe die durch Matrizenmultiplikation gegebene Gruppenwirkung von G auf $\mathbb{R}^3$.

(i) Bestimmen Sie die Bahnen der Elemente $(1,0,0), (0,0,1), (0,1,-1) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Bestimmen Sie nun die Stabilisatorgruppen derselben drei Elemente.

(iii) Zu welcher Ihnen bekannten Gruppe ist $\mathrm{Stab}_G((0,1,-1))$ isomorph?

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Zeigen Sie, dass S_n für $n \geq 3$ von zwei Elementen erzeugt wird:

(i) Erklären Sie zunächst, dass sich jeder k-Zykel $\sigma \in S_n$ als Produkt von $k-1$ Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_{k-1} \in S_n$ schreiben lässt.

(ii) Begründen Sie nun, dass sich jede Transposition als Produkt von Transpositionen der Form $(k \;\; k+1)$ schreiben lässt.

(iii) Folgern Sie, dass $S_n = \langle (1 \;\; 2), (1 \;\; \ldots \;\; n) \rangle$ ist.

Bemerkung: Tatsächlich gilt (iii) mit analoger Argumentation auch für eine beliebige Transposition und einen beliebigen n-Zykel.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 5

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl, welche die Ordnung von G teilt. Zeigen Sie mit Hilfe folgender Anleitung, dass G eine Untergruppe der Ordnung p besitzt:

(i) Sei $X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdot \ldots \cdot g_p = 1\}$ und betrachten Sie die Gruppenwirkung gegeben durch zyklische Permutation, also

$$\lambda\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times X \to X, \quad (\overline{m}, (g_1, \ldots, g_p)) \mapsto (g_{1+m}, \ldots, g_p, g_1, \ldots, g_m).$$

Überlegen Sie sich, dass λ wohldefiniert ist, also dass das Bild von λ wirklich wieder in X liegt.

(ii) Begründen Sie, dass die Bahn eines Elementes $x \in X$ entweder ein- oder p-elementig ist.

(iii) Von welcher Form muss $x \in X$ sein, wenn $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cdot x$ einelementig ist? Finden Sie ein Beispiel für ein solches $x \in X$.

(iv) Seien a und b die Anzahlen der Bahnen der Kardinalität 1 bzw. p. Stellen Sie die Bahnengleichung in Abhängigkeit von a und b auf und begründen Sie, dass X aus n^{p-1} Elementen besteht.

(v) Folgern Sie, dass p ein Teiler von a ist und beenden Sie den Beweis.